

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA**

**Facultad de Ciencias Exactas**

Departamento de Física



**ESTUDIO DE GENERACIÓN DE  
AUTOIMÁGENES A PARTIR DE REDES  
DE VOLUMEN**

Tesis para optar al grado de Doctor presentada por:

**Gustavo Fabián Forte**

Director: Dr. Nestor Bolognini

Codirectora: Dra. Myrian Tebaldi

Centro de Investigaciones Ópticas, CIOp (CONICET- CIC)

Mayo 2014

A mis hijos, Lucas y Tiziano

# ÍNDICE GENERAL

	Pag.
Índice General.....	i
Índice de Figuras.....	iv
Índice de Tablas.....	vii
Agradecimientos.....	ix

## CAPÍTULO 1

### Introducción general

1.1	Motivaciones y objetivos.....	1
1.2	Esquema general.....	3
1.3	Referencias.....	5

## CAPÍTULO 2

### Difracción a través de una red de volumen

2.1	Introducción.....	7
2.2	Modelo propuesto para la difracción a través de una red de volumen usando integral de camino.....	8
2.2.1	Ecuación de onda para medios inhomogéneos.....	8
2.2.2	Propagación de ondas en medios inhomogéneos: Formulación de integral de camino.....	11
2.2.3	Aproximación a primer orden en $\hat{x}$ del elemento diferencial de longitud de camino $ds$ .....	14
2.2.4	Aproximación a orden cero en $\hat{x}$ del elemento diferencial de longitud de camino $ds$ .....	15
2.3	Referencias.....	17

## CAPÍTULO 3

### El efecto Talbot a través de una red de volumen

3.1	Introducción.....	18
3.2	El efecto Talbot.....	19
3.3	Aplicación del modelo de integral de camino al efecto Talbot con una red de volumen. Resultados.....	24
3.3.1.	Medios homogéneos.....	24
3.3.2.	Red de amplitud de volumen.....	25
3.3.3.	Red de fase de volumen.....	28
3.3.4.	Red compleja de volumen.....	31
3.3.4.1	Partes real e imaginaria en fase.....	31
3.3.4.2	Partes real e imaginaria fuera de fase.....	33
3.4	Referencias.....	35

## CAPÍTULO 4

### Redes de volumen fotorrefractivas

4.1	Introducción.....	36
4.2	El efecto fotorrefractivo.....	37
4.2.1	Antecedentes.....	37
4.2.2	Materiales fotorrefractivos: propiedades físicas de los silenitas.....	38
4.2.3	El modelo de transporte de bandas.....	40
4.2.4	El campo de carga espacial.....	41
4.2.5	El efecto electro-óptico.....	44
4.2.6	La red de índice fotorrefractiva.....	50
4.3	Formación de imagen a partir de un sistema incoherente.....	51
4.4	Dispositivo experimental para el registro de una red de volumen fotorrefractiva generada con luz incoherente.....	56
4.5	Modelo teórico propuesto para el cálculo de una red de volumen fotorrefractiva generada con luz incoherente.....	57
4.6	Simulación de una red de volumen fotorrefractiva generada con luz incoherente...	61
4.6.1	Generación de redes en términos del espesor del cristal.....	62

4.6.2	Generación de redes en términos del campo externo.....	64
4.6.3	Generación de redes en términos del diámetro de la pupila de salida.....	66
4.6.4	Comparación entre distribuciones de intensidad simuladas y experimentales.....	68
4.7	Referencias.....	71

## **CAPÍTULO 5**

### **El efecto Talbot a través de una red de volumen fotorrefractiva**

5.1	Introducción.....	73
5.2	Dispositivo experimental para la lectura de una red de volumen fotorrefractiva. Resultados.....	74
5.3	Aplicación del modelo de integral de camino al cálculo de las autoimágenes generadas por una red de volumen fotorrefractiva. Resultados.....	79
5.4	Limitaciones en la resolución espacial de la red de volumen.....	84
5.5	Estudio cuantitativo de la visibilidad de las autoimágenes generadas por una red de volumen fotorrefractiva.....	85
5.6	Referencias.....	92

## **CAPÍTULO 6**

### **Conclusiones generales**

6.1	Conclusiones generales.....	93
6.2	Lista de publicaciones .....	102

## **APÉNDICE 1**

<b>Derivación de la Ec. (2.8) de la Sección 2.2.1.....</b>	<b>103</b>
--	------------

## **APÉNDICE 2**

<b>Cálculo del factor de normalización <math>A</math> en el propagador de la Sección 2.2.2.....</b>	<b>105</b>
---	------------

## **APÉNDICE 3**

<b>Derivación de la Ec. (2.24) de la Sección 2.2.3.....</b>	<b>107</b>
---	------------

# ÍNDICE DE FIGURAS

## CAPÍTULO 2

**Figura 2.1:** El camino es especificado dando sus coordenadas  $x$  para un gran número de valores de  $z$  separados por intervalos muy pequeños,  $\varepsilon$ . La suma sobre caminos es definida como una integral sobre todas estas coordenadas especificadas. Luego, se toma el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$ .....12

## CAPÍTULO 3

**Figura 3.1:** Visibilidad (plano  $n = 1/4$ ) vs. amplitud de modulación de la red de fase.....23

**Figura 3.2:** Visibilidad  $V_n$  en términos de  $\gamma$  ( $\gamma = k_0 \delta n_a L_z$ ) para diferentes localizaciones axiales de los patrones de Fresnel.....27

**Figura 3.3:** Visibilidad  $V_n$  en términos de  $\beta$  ( $\beta = k_0 \delta n_f L_z$ ) para diferentes localizaciones axiales de los patrones de Fresnel.....30

**Figura 3.4:** Visibilidad  $V_n$  en términos de  $\beta$  y  $\gamma$ , para diferentes localizaciones axiales de los patrones de Fresnel.....32

**Figura 3.5:** Visibilidad  $V_n$  en términos de  $\beta$  y  $\gamma$  para los nuevos planos de a) autoimagen y b) uniformidad, obtenidos a partir de una red compleja de volumen con ambas modulaciones en fase.....33

## CAPÍTULO 4

**Figura 4.1:** Variación espectral del índice de refracción para un cristal BSO.....38

**Figura 4.2:** Espectros de absorción de los cristales: (a) BSO y (b) BGO.....39

**Figura 4.3:** Diagrama de niveles de energía ilustrando el modelo de transporte de bandas.....41

**Figura 4.4:** Campo de carga espacial  $E^{ce}_1$  vs. período de la red  $\Lambda$  para BaTiO<sub>3</sub> y BSO.....42

**Figura 4.5:** Factor de escala debido al campo aplicado  $E_0$  en la Ec.(4.5) vs.  $E_0$  para diferentes valores del período de la red  $\Lambda$ .....44

**Figura 4.6:** Modos normales: a)  $k = n_1 k_0$ ; b)  $k = n_2 k_0$ ; c)  $k = n_3 k_0$ .....47

<b>Figura 4.7:</b> Determinación de los modos normales e índices de refracción a partir del elipsoide de índices.....	48
<b>Figura 4.8:</b> Función de Transferencia Óptica (FTO) de un sistema limitado por difracción con pupila de salida cuadrada.....	52
<b>Figura 4.9:</b> Función de Transferencia Óptica (FTO) para un sistema desenfocado con pupila de salida cuadrada.....	55
<b>Figura 4.10:</b> Arreglo experimental de registro: $S_1$ , fuente de luz blanca; $F_G$ , filtro interferencial centrado en 530 nm; $G$ , red de Ronchi; $L_1$ , lente condensadora; $L_2$ , lente formadora de imagen; $D$ , diafragma; $BS$ , divisor de haz.....	56
<b>Figura 4.11:</b> Arreglo experimental para la medición de la distribución de intensidad luminosa que origina la red de volumen fotorrefractiva.....	69

## CAPÍTULO 5

<b>Figura 5.1:</b> Arreglo experimental de lectura: $CS$ , sistema colimador; $BS$ , divisor de haz; $F_R$ , filtro de interferencia rojo.....	74
<b>Figura 5.2:</b> Perfil de intensidad de las autoimágenes generadas por redes de índice con diferentes modulaciones. Patrones calculados (a) y experimentales (b) usando las redes descritas en Tabla 4.1; patrones calculados (c) y experimentales (d) usando redes con $E_0$ creciente, $D = 3$ mm y $L_Z = 3$ mm; patrones calculados (e) y experimentales (f) usando redes con $D$ variable, $E_0$ y $L_Z$ de la Tabla 4.3.....	80
<b>Figura 5.3:</b> Perfil de intensidad de los patrones calculados (a) y experimentales (b) usando redes con $D$ variable, $E_0 = 7$ kV/cm y $L_Z = 3$ mm.....	82
<b>Figura 5.4:</b> Perfil de intensidad de la primera autoimagen en términos del espesor del cristal, para $D = 50$ mm y $E_0 = 7$ kV/cm.....	83
<b>Figura 5.5:</b> Visibilidad de los patrones teóricos (■) y experimentales (■) vs. parámetro de fase $\beta_{mod}$ para $L_Z = 1, 2, 3, 4, 5$ y 6 mm con valores fijos de $D = 3$ mm and $E_0 = 7$ kV/cm...88	88
<b>Figura 5.6:</b> Visibilidad de los patrones teóricos (●) y experimentales (●) vs. parámetro de fase $\beta_{mod}$ para $E_0 = 5, 6, 7, 8$ and 9 kV/cm con valores fijos de $D = 3$ mm y $L_Z = 3$ mm.....	89
<b>Figura 5.7:</b> Visibilidad de los patrones teóricos (▲) y experimentales (▲) vs. parámetro de fase $\beta_{mod}$ , para $D = 50, 25, 10, 5$ y 3 mm (▲), con valores fijos de $L_Z = 3$ mm y $L_Z = 6$	



mm y para  $D = 50$  y  $3$  mm (▲), con valores fijos de  $L_Z = 3$  mm y  $L_Z = 6$  mm. En todos los casos se usó  $E_0 = 7$  kV/cm.....89

**Figura 5.8:** Visibilidad de las autoimágenes vs. parámetro de fase  $\beta_{\text{mod}}$  para: (a) patrones teóricos: ■  $L_Z = 1, 2, 3, 4, 5$  y  $6$  mm con valores fijos de  $D=3$  mm and  $E_0=7$  kV/cm; ●  $E_0= 5, 6, 7, 8$  and  $9$  kV/cm con valores fijos de  $D=3$  mm and  $L_Z = 3$ mm; ▲  $D=50, 25, 10, 5$  and  $3$  mm con valores fijos de  $L_Z=6$ mm and  $E_0=7 \times 10^2$  kV/m; (b) patrones experimentales: ■  $L_Z = 1, 2, 3, 4$  and  $6$  mm con valores fijos de  $D=3$  mm y  $E_0=7$  kV/cm; ●  $E_0= 5, 6, 7, 8$  and  $9$  kV/cm con valores fijos de  $D=3$  mm y  $L_Z = 3$ mm; ▲  $D=50$  and  $3$  mm con valores fijos de  $L_Z=6$ mm y  $E_0=7 \times 10^2$  kV/m. ....91

# ÍNDICE DE TABLAS

## CAPÍTULO 3

<b>Tabla 3.1:</b> Secuencia de patrones de Fresnel fraccionales para una red de amplitud y una red de fase, ambas planas.....	23
<b>Tabla 3.2:</b> Amplitud de los patrones de Fresnel normalizados a una distancia de Talbot fraccional $z = (1+n)z_T$ , con $n=0$ (plano de autoimagen) y $n=0.125$ (plano de réplica con menor visibilidad).....	27
<b>Tabla 3.3:</b> Amplitud de los patrones de Fresnel normalizados a una distancia de Talbot fraccional $z = (1+n)z_T$ , con $n=0.25$ (plano de autoimagen) y $n=0.125$ (plano de réplica con menor visibilidad).....	30
<b>Tabla 3.4:</b> Amplitud de los patrones de Fresnel normalizados, a una distancia de Talbot fraccional $z = (1+n)z_T$ , con $n=0.125$ , $\gamma \geq 3$ y $\beta = \pi/2$ .....	34

## CAPÍTULO 4

<b>Tabla 4.1:</b> Modulaci3n de la red de 3ndice simulada para diferentes espesores del cristal: $L_Z = 2$ mm, 4 mm y 6 mm, con $D = 3$ mm y $E_0 = 7$ kV/cm.....	63
<b>Tabla 4.2:</b> Modulaci3n de la red de 3ndice simulada para diferentes campos externos: $E_0 = 5$ kV/cm, 7 kV/cm y 9 kV/cm con $D = 15$ mm y $L_Z = 6$ mm.....	64
<b>Tabla 4.3:</b> Modulaci3n de la red de 3ndice simulada para diferentes di3metros de la pupila de salida: $D = 50$ mm, 25 mm y 3 mm, con $E_0 = 7$ kV/cm y $L_Z = 6$ mm.....	66
<b>Tabla 4.4:</b> Distribuci3n de intensidad luminosa medida (izquierda) y simulada (derecha) que origina la red de volumen fotorrefractiva. $D = 50$ mm, 25mm y 3 mm (desde arriba hacia abajo).....	70

## CAPÍTULO 5

<b>Tabla 5.1:</b> Primera autoimagen generada por redes con espesor de cristal $L_Z$ variable, con $D = 3$ mm y $E_0 = 7$ kV/cm.....	75
<b>Tabla 5.2:</b> Primera autoimagen generada por redes con campo externo $E_0$ variable, con $D = 3$ mm y $L_Z = 3$ mm.....	76

**Tabla 5.3:** Primera autoimagen generada por redes con diámetro de pupila de salida  $D$  variable. (a) Espesor de cristal  $L_Z = 6$  mm; (b) Espesor de cristal  $L_Z = 3$  mm.....77

## **Agradecimientos**

Quiero agradecer al Dr. Néstor Bolognini y a la Dra. Myrian C. Tebaldi el esfuerzo y la dedicación puestos de manifiesto en la dirección de esta Tesis. Ambos, con sus vastos conocimientos y su visión profunda supieron acompañar este trabajo. Más aún, por encima del aspecto intelectual, quiero destacar el aspecto humano, por la sencillez y humildad que en todo momento demostraron como compañeros de trabajo, a lo largo del desarrollo de esta Tesis.

Valoro la buena predisposición del Dr. Jorge Tocho, Director del Centro de Investigaciones Ópticas, por haber dado su aval para la realización de este trabajo en esta institución.

También quiero agradecer a todo el personal del CIOp, Investigadores, Profesionales, Becarios, Técnicos y Administrativos, con quienes compartí momentos muy agradables.

Agradezco el apoyo afectivo, sencillo y cotidiano de mis hijos, Lucas y Tiziano. A ellos quiero dedicar este trabajo.

La Plata, Diciembre de 2013.

# CAPÍTULO 1

## Introducción general

---

### 1.1 Motivaciones y objetivos.

En Óptica, el estudio de la difracción de luz comienza con la utilización de objetos difractivos planos [1.1]. Visto como una transformación solo se modifican las propiedades del espacio en las dos coordenadas asociadas al plano del objeto. La tercera dimensión se tiene en cuenta solo como dirección para la propagación libre. A partir del uso de objetos 3D tales como estructuras fotónicas, redes de volumen, dispositivos ópticos de volumen para almacenar datos, entre otros, la tercera coordenada toma relevancia como un nuevo grado de libertad en el proceso de transformación del espacio. En este caso, el campo óptico se modifica a medida que se propaga a través del medio que constituye el objeto 3D y la dirección longitudinal pasa a formar parte del proceso de la difracción del campo.

La difracción de luz a partir de objetos periódicos de volumen ha sido ampliamente estudiada desde el punto de vista teórico y experimental [1.2-1.6]. Las redes de fase de volumen son de considerable importancia como elementos difractivos en el acoplamiento, deflexión, filtrado, guiado y modulación de luz en acusto-óptica [1.7], holografía [1.8-1.9], óptica integrada [1.10-1.12] y espectroscopía [1.13]. A su vez la difracción de luz a partir de redes holográficas involucra fenómenos tales como mezclado de ondas, conjugación de fase y holografía dinámica [1.14].

La importancia que tienen las redes de volumen desde el punto de vista científico como tecnológico ha motivado en esta tesis el estudio de las mismas como generadoras de uno de los fenómenos más básicos de la Óptica física, como es el fenómeno de autoimágenes o efecto Talbot. En su reporte original [1.15], Talbot usó redes de difracción planas iluminadas con luz blanca espacialmente coherente y encontró réplicas a distancias periódicas en la dirección de propagación, con un período distinto según el color de la réplica. Actualmente, es bien conocido que bajo iluminación coherente, un campo de ondas

con periodicidad transversal exhibe, por propagación libre, una periodicidad longitudinal cuyo período se llama distancia de Talbot.

Las aplicaciones del fenómeno de autoimágenes se encuentran en ramas muy diversas de la Óptica, como es en procesamiento de imágenes, fabricación de elementos ópticos usando micro y nanolitografía, testeo de elementos ópticos y metrología óptica. [1.16]

Dada su naturaleza fundamentalmente ondulatoria, el efecto Talbot encontró su contrapartida en diferentes campos de la Física. En el campo de la Óptica, el efecto Talbot temporal se observa en la propagación de un pulso luminoso en una fibra óptica, en conexión con la dispersión temporal del pulso [1.17]. En el campo de la Mecánica Cuántica, la naturaleza ondulatoria de la materia a escala microscópica permite a una partícula extenderse y reconstruirse a sí misma a través del tiempo, mostrando lo que se llama “quantum revivals” [1.18]. También fue observado en el proceso cuántico de la difracción de un haz de macromoléculas a través de una red plana [1.19].

En los trabajos mencionados previamente sobre el efecto Talbot, siempre se planteó utilizar un campo de ondas cuyo estado inicial, previo a la propagación libre, solo varíe con las coordenadas transversales. En Óptica espacial esto equivale a usar objetos difractivos planos. Por otra parte, las autoimágenes generadas a partir de una red de volumen almacenada en un cristal fotorrefractivo de óxido de silicio bismuto,  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  (BSO), fueron experimentalmente analizadas. La red queda almacenada en el cristal en forma de variaciones de birrefringencia inducida. En un primer trabajo [1.20], una onda plana linealmente polarizada incide sobre la red y emerge mostrando zonas alternadas con dos estados de polarización diferentes. La onda transmitida a través de un polarizador ubicado a la salida del cristal, presenta dos niveles de intensidad con una visibilidad que depende de los estados de polarización. De esta manera, la red almacenada se comporta como una red de amplitud, a partir de la cual se estudia la formación de autoimágenes. En un trabajo posterior [1.21], una onda plana codificada en amplitud incide sobre la red de volumen, en ausencia de polarizadores, mostrando la formación de franjas de Lau. El comportamiento por propagación de las franjas de Lau coincide con el de una red de fase pura plana, evidenciando, sin embargo, el efecto del volumen en la visibilidad de las franjas. En ambos trabajos, el modelo teórico empleado no considera la difracción en la naturaleza 3D del

medio. La necesidad de un modelo adecuado para explicar la influencia del volumen, en particular de una red fotorrefractiva, sobre el fenómeno de autoimágenes representa otra de las motivaciones para realizar esta tesis.

El objetivo general de esta tesis es analizar teórica y experimentalmente el fenómeno de autoimágenes a partir de un objeto de volumen. Este estudio implica llevar a cabo objetivos específicos.

El primero de estos objetivos es proponer un modelo que permita describir el campo difractado, y en particular las autoimágenes, haciendo un análisis de la propagación del campo de ondas a través del medio inhomogéneo de la red de volumen.

Los resultados teóricos que surjan del modelo serán comparados con resultados experimentales. Para ello es necesario elegir el material que soporta la red, y por lo tanto, el índice de refracción inhomogéneo al que se aplica el modelo. En éste trabajo se utilizó un material fotorrefractivo, en particular, cristales BSO disponibles en el laboratorio del Ciop. Luego surge la necesidad de caracterizar la red en términos de un conjunto de parámetros de volumen. Esta necesidad lleva a otro de los objetivos de esta tesis, la elaboración de un modelo que permita calcular la red fotorrefractiva en las condiciones en las que se realizó el experimento.

## 1.2 Esquema general

El Capítulo 2 contiene el desarrollo de un modelo teórico propuesto para analizar la difracción de campos electromagnéticos en redes de volumen. Como resultado de este modelo se obtienen expresiones para la amplitud compleja del campo en la región de Fresnel, considerando la propagación a primer orden y a orden cero en el medio inhomogéneo de la red.

En el Capítulo 3 se presenta el estudio teórico del Efecto Talbot a partir de redes de volumen. Se hace una breve reseña del fenómeno a partir de redes planas, ya sea de amplitud como de fase.

La expresión hallada para la amplitud del campo teniendo en cuenta la propagación inhomogénea a orden cero se utiliza en este capítulo para analizar el efecto Talbot en redes de volumen 1D binarias, ya sea de amplitud pura, de fase pura, y complejas. En el caso de

redes complejas, se consideran dos casos: ambas modulaciones en fase y fuera de fase. Los resultados obtenidos muestran un comportamiento peculiar de estas redes de volumen como generadoras de autoimágenes. En todos los casos se estudia la visibilidad de las autoimágenes en términos de parámetros que caracteriza a la red de volumen.

El Capítulo 4 está dedicado al estudio teórico y experimental de la formación de redes de volumen 1D almacenadas en cristales fotorrefractivos.

Se comienza con una descripción general del efecto fotorrefractivo y de los materiales que muestran este fenómeno. Se detalla el modelo de transporte de bandas para explicar la formación del campo eléctrico de carga espacial en el material. La descripción del efecto electro-óptico deja en claro la formación de la red de índice a partir del campo de carga espacial.

Se introduce, a partir de la Óptica de Fourier, la teoría de formación de imagen para un sistema incoherente.

A partir de la conjunción de los modelos antes mencionados, se propone un modelo teórico para el cálculo de una red de volumen fotorrefractiva generada proyectando la imagen incoherente de una red de Ronchi en el volumen del cristal. Las redes simuladas usando el modelo propuesto se describen en términos de los parámetros del registro.

Se presenta el dispositivo experimental empleado para el registro de este tipo de redes en el laboratorio.

El Capítulo 5 muestra el estudio teórico y experimental del efecto Talbot usando redes de volumen fotorrefractivas. Se presenta el dispositivo experimental para la lectura de este tipo de redes y los patrones de autoimágenes experimentales. Se aplica el modelo esbozado en el Capítulo 2 al cálculo de las autoimágenes generadas por la red de volumen fotorrefractiva. Se comparan cualitativamente los patrones simulados con los experimentales.

Se estudia cuantitativamente la visibilidad de las autoimágenes, simuladas y experimentales. Se propone un parámetro en términos del cual el comportamiento de la visibilidad se expresa mediante una relación funcional simple.



## 1.3 Referencias

- [1.1] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill Inc., New York, 1996)
- [1.2] C.V. Raman, N.S.N. Nath, Proc. Indian Acad. Sci. **2** 406 (1935).
- [1.3] W.R. Klein and B.D. Cook, IEEE Trans. Sonics Ultrason., **SU-14**, 123 (1967).
- [1.4] H. Kogelnik, *Coupled wave theory for thick hologram gratings*, Bell Syst. Tech. J. **48**, 2909 (1969).
- [1.5] M.G. Moharam and L. Young, Appl. Opt. **17**, 1757 (1978).
- [1.6] L. Solymar and D.J. Cooke, *Volume Holography and Volume Gratings* (Academic Press, London, New York, 1981)
- [1.7] J.M. Liu, *Photonic Devices, Ch. 8: Acousto-Optic Devices* (Cambridge University Press, 2005)
- [1.8] F.H. Mok, *Angle-multiplexed storage of 5000 holograms in lithium niobate*, Opt. Lett. **18**, 915 (1993).
- [1.9] D. Psaltis, M. Levene, A. Pu, G. Barbastathis, and K. Curtis, *Holographic storage using shift multiplexing*, Opt. Lett., **20**, 782, (1995).
- [1.10] D. L. Hetherington, R. K. Kostuk, and M. C. Gupta, *Dispersion compensation for an integrated optic grating coupler utilizing a transmission volume hologram*, Appl. Opt., **32**, 303 (1993).
- [1.11] N. Whiting, P. Nikolaou, N. A. Eschmann, M. J. Barlow, R. Lammert, J. Ungar, W. Hu, L. Vaissie, B. M. Goodson, *Using frequency-narrowed, tunable laser diode arrays with integrated volume holographic gratings for spin-exchange optical pumping at high resonant fluxes and xenon densities*, Appl. Phys. B, **106**, 775 (2012).
- [1.12] D. G. MacLachlan, R. R. Thomson, C. R. Cunningham, and D. Lee, *Mid-Infrared Volume Phase Gratings Manufactured using Ultrafast Laser Inscription*, Opt. Mat.Exp., **3**, 1616 (2013)
- [1.13] M. Paillet, F. Meunier, M. Verhaegen, S. Blais-Ouellette and R. Martel, Rev. Sci. Instrum., **81**, 053111 (2010)
- [1.14] P. Günter and J.P. Huignard, *Optical Processing using wave mixing in photorefractive crystals. Photorefractive Materials and Their Applications 2: Topics in Applied Physics*, (Eds. P. Günter and J.P. Huignard, Vol.62, Springer-Verlag, Berlin, 1988)

- [1.15] H. F. Talbot, “*Facts relating to Optical Science. No.IV*”, Philos. Mag. 9, 401-407 (1836).
- [1.16] K. Patorski, “*The self-imaging phenomenon and its applications*”, Prog.Opt. **27**, 3-108 (1989).
- [1.17] T. Janson and J. Janson, “*Temporal self-imaging effect in single mode optical fiber*”, J. Opt. Soc. Am. **71**, 1373 (1981)
- [1.18] J.H. Eberly, N.B. Narozhny and J.J. Sanchez Mondragon, *Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model*, Phys. Rev. L. **44** 1323 (1980).
- [1.19] B. Brezger, L. Hackermüller, S. Uttenthaler, J. Petschinka, M. Arndt and A. Zeilinger, *Matter-wave interferometer for large molecules*, Phys. Rev. L. **88** 100404(2002).
- [1.20] M.C. Lasprilla, A. Agra Amorim, M. Tebaldi, N. Bolognini, *Self-imaging through incoherent to coherent conversion*, Opt. Eng. **35** (1996) 1440.
- [1.21] M. Tebaldi, L. Angel, N. Bolognini, *Lau fringes formation by using a grating registered in a BSO crystal*, Opt. Eng., **37** (1998) 2971.

# CAPÍTULO 2

## Difracción a través de una red de volumen

---

### 2.1 Introducción

Una teoría que permita explicar la formación de patrones de difracción de luz generados por transmisión a través de una red de volumen, así como calcular su distribución de intensidad, necesita considerar la propagación de ondas electromagnéticas en el medio inhomogéneo de la red.

Muchos autores han tratado la propagación espacial de campos ópticos a través de un medio inhomogéneo mediante una formulación de integral de camino. En su trabajo pionero, Eichmann establece un paralelismo con el problema mecano-cuántico de la propagación temporal de partículas a través de un potencial inhomogéneo [2.1]. Más tarde, las formulaciones de integrales de camino han sido de considerable interés debido a sus aplicaciones en óptica para analizar la propagación de ondas en medios aleatorios [2.2], en medios turbulentos [2.3], en medios con gradientes de índice (GRIN) [2.4], así como en acopladores direccionales usados en óptica integrada [2.5].

En ésta tesis la formulación de integral de camino se aplica al cálculo de la amplitud del campo difractado por redes de volumen, por lo que el propagador se evalúa en medios con inhomogeneidad periódica. En la literatura no hay antecedentes referidos a la utilización de este formalismo a la formación de imágenes a partir de objetos periódicos tridimensionales.

## 2.2 Modelo propuesto para la difracción a través de una red de volumen usando integral de camino

### 2.2.1 Ecuación de onda para medios inhomogéneos

El estudio de la propagación de ondas electromagnéticas de luz en medios materiales se fundamenta en las ecuaciones de Maxwell macroscópicas. Estas ecuaciones relacionan los vectores de campo eléctrico  $\mathbf{E}$  y desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}$  con los vectores de inducción magnética  $\mathbf{B}$  y de campo magnético  $\mathbf{H}$ . Asumiendo soluciones con dependencia temporal armónica  $e^{-i\omega t}$ , a partir de las cuales se puede construir una solución arbitraria por superposición de Fourier, las ecuaciones para las amplitudes  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ , etc., se expresan como sigue

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} - i\omega \mathbf{D} \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 0. \quad (2.4)$$

donde se han considerado regiones libres de cargas, en presencia de densidades de corriente  $\mathbf{J}$ .

Las relaciones constitutivas son

$$\mathbf{J} = \varepsilon_0 \omega \sigma_t \mathbf{E}, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_t \mathbf{E}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mu_t \mathbf{H}, \quad (2.7)$$

donde las funciones escalares  $\sigma_t[\mathbf{r}, \omega]$ ,  $\varepsilon_t[\mathbf{r}, \omega]$  y  $\mu_t$  corresponden a un medio no magnético, lineal, isotrópico e inhomogéneo. Combinando las ecuaciones (2.1)-(2.7) se llega a la siguiente ecuación para el vector de campo eléctrico (Apéndice 1)

$$\nabla \left( \frac{1}{\varepsilon_t} \nabla \cdot \mathbf{E} \right) + \nabla^2 \mathbf{E} + k_0^2 \mu_t (i\sigma_t + \varepsilon_t) \mathbf{E} = 0 \quad (2.8)$$

donde  $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$  es el número de onda del campo en el vacío. Una ecuación similar se obtiene para el vector de campo magnético.

La Ec. (2.8) deriva en una ecuación de onda siempre que consideramos medios débilmente inhomogéneos, es decir, medios en los cuales la función  $\varepsilon_t$  varía ligeramente en la escala de la longitud de onda local de la onda propagante. Esto se puede probar estimando el orden de magnitud de cada término de la Ec. (2.8) [2.6]. La mayor contribución está dada por el segundo término y el tercer término, los cuales son del orden de  $(2\pi/\lambda)^2 E$ , donde  $\lambda$  es la longitud de onda local en el medio. El orden de magnitud del primer término se obtiene reemplazando el operador  $\nabla$  por una derivada con respecto a alguna dirección  $S$  en el espacio,

$$\nabla\left(\frac{1}{\varepsilon_t}\nabla\varepsilon_t\cdot\mathbf{E}\right)\approx\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{1}{\varepsilon_t}\nabla\varepsilon_t\cdot\mathbf{E}\right)\approx\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{1}{\varepsilon_t}\nabla\varepsilon_t\cdot\mathbf{E}\right)+\mathbf{E}\cdot\frac{\partial}{\partial S}(\nabla\varepsilon_t/\varepsilon_t) \quad (2.9)$$

Bajo ciertas condiciones que serán delineadas más abajo, el segundo término de la ecuación (2.9) es mucho más pequeño que el primero. Luego, volviendo a la Ec. (2.8) y comparando los órdenes de magnitud del primero y segundo (o tercer) término tenemos

$$R_I = \frac{O(I^{er} \text{ término})}{O(2^{do} \text{ término})} \approx \frac{\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\nabla\varepsilon_t}{\varepsilon_t}}{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2} = \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\nabla\varepsilon_t}{\varepsilon_t} \approx \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_I}{\varepsilon_t \Delta S} \quad (2.10)$$

En la ecuación (2.10) el orden de magnitud de  $\nabla\varepsilon_t$  se expresa como la relación de la diferencia  $\varepsilon_2 - \varepsilon_I$  entre los valores de la permitividad eléctrica en dos puntos muy cercanos del medio inhomogéneo y la distancia  $\Delta S$  que los separa. Tomando  $\Delta S = \lambda$  tenemos

$$R_I = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_I}{\varepsilon_t} \quad (2.11)$$

Para despreciar el primer término de la Ec. (2.8) necesitamos que  $R_I \ll 1$ , es decir, que el cambio relativo de  $\varepsilon_t$  a través de una distancia igual a una longitud de onda sea mucho menor que la unidad, lo cual prueba la necesidad de considerar solo medios débilmente

inhomogéneos. Esta condición se cumple en la mayoría de los medios ópticos inhomogéneos. El único lugar donde (2.11) es aproximadamente igual o mayor que la unidad es en la interfaz entre dos regiones con diferente permitividad eléctrica. En estos casos se resuelve la ecuación de onda en las regiones homogéneas y se unen las soluciones por medio de las condiciones de contorno.

Retomando la aproximación hecha en la Ec. (2.9), se puede ver que se llegó a esta condición sobre el medio despreciando el segundo término de esta ecuación. Para verificar si esto es válido se estima el orden de magnitud del término despreciado en relación con el del término remanente,

$$R_2 = \frac{O(2^{\text{do}} \text{ término})}{O(1^{\text{er}} \text{ término})} = \frac{\mathbf{E} \cdot \frac{\partial}{\partial S} (\nabla \varepsilon_t / \varepsilon_t)}{\frac{2\pi}{\lambda} \left( \frac{1}{\varepsilon_t} \nabla \varepsilon_t \cdot \mathbf{E} \right)} \approx \frac{1}{2\pi} \lambda \frac{(|\nabla \varepsilon_t| / \varepsilon_t)_2 - (|\nabla \varepsilon_t| / \varepsilon_t)_1}{(|\nabla \varepsilon_t| / \varepsilon_t) \Delta S} \quad (2.12)$$

La condición que hace que  $R_1 \ll 1$  es igualmente válida si los dos términos que se comparan en (2.12) tienen igual orden de magnitud. Esto significa que solo se requiere que el cambio del gradiente de  $\varepsilon_t$  sobre la distancia de una longitud de onda sea aproximadamente igual o menor que el gradiente en sí mismo.

Combinando las ecuaciones (2.1)-(2.7) se llega también a la siguiente ecuación para el vector de campo magnético

$$\nabla \left( -\frac{1}{\mu_t} \nabla \mu_t \cdot \mathbf{H} \right) - \nabla^2 \mathbf{H} = i\omega \varepsilon_0 \nabla (\sigma_t - i\varepsilon_t) \times \mathbf{E} + k_0^2 \mu_t (i\sigma_t + \varepsilon_t) \mathbf{H} \quad (2.13)$$

donde el primer término es idénticamente nulo para el medio no magnético considerado, ya que  $\nabla \mu_t = 0$ . Un razonamiento basado en órdenes de magnitud similar al usado en la Ec. (2.10) conduce a la eliminación del primer término en el segundo miembro de la Ec. (2.13).

Por lo tanto, la solución que describe la propagación del campo monocromático a través del medio inhomogéneo satisface la siguiente ecuación escalar

$$\nabla^2 \Psi + k_0^2 \mu_t (\varepsilon_t + i\sigma_t) \Psi = 0 \quad (2.14)$$

para las componentes  $\Psi(\mathbf{r}, \omega)$  de los vectores de campo eléctrico y campo magnético. Esta ecuación tiene soluciones de onda locales con número de onda  $k(\mathbf{r}) = k_0 n(\mathbf{r})$  donde

$n(\mathbf{r}) = \sqrt{\mu_t(\varepsilon_t + i\sigma_t)}$  es el índice de refracción local. La parte real de este índice se asocia con el ritmo al cual la fase cambia a medida que el campo se propaga y la parte imaginaria, que también se halla implícita en  $\varepsilon_t[\mathbf{r}, \omega]$ , con el ritmo al que la energía es absorbida.

## 2.2.2 Propagación de ondas en medios inhomogéneos: Formulación de integral de camino

La Ec. (2.14) es conocida como la ecuación de Helmholtz para medios inhomogéneos y existen una diversidad de métodos para encontrar sus soluciones. En ésta tesis se utiliza una formulación de integral de camino similar a la extensamente usada en mecánica cuántica [2.7]. Este procedimiento se basa en la definición de suma sobre caminos, donde cada posible trayectoria contribuye a la amplitud total del campo final. Se esboza, por simplicidad, el caso bidimensional. La contribución de un camino en particular,  $x(z)$ , se expresa mediante la siguiente funcional

$$\phi[x(z)] \sim e^{ik_0 S[x(z)]}, \quad (2.15)$$

cuya fase es la longitud de camino óptico para el camino considerado,  $S[x(z)]$ , en unidades de longitud de onda.

Para definir la suma sobre todos los caminos, se representa el medio inhomogéneo en forma discretizada como una sucesión de secciones delgadas transversales, como se observa en la Figura 2.1. Esto da un conjunto de valores  $z_j$  espaciados una distancia  $\Delta z = z_{j+1} - z_j$ , entre los valores inicial y final,  $z_0$  y  $z_t$ , respectivamente. En cada sección se selecciona un punto  $x_j$ . Se construye un camino conectando todos los puntos seleccionados mediante líneas rectas. Se define la suma sobre todos los caminos construidos de esta manera tomando una integral múltiple sobre todos los valores de la recta transversal  $x_j$ , que separa la sección  $j-1$  de la  $j+1$ , para  $j$  entre 0 y  $l$ . Adoptando la notación de Dirac, la ecuación resultante para el propagador del campo es la siguiente

$$\langle z_t, x_t | z_0, x_0 \rangle = \frac{1}{A} \int \int \dots \int e^{ik_0 \sum_{j=1}^l S_j(x_j, x_{j+1}, \Delta z)} \frac{dx_1}{A} \frac{dx_2}{A} \dots \frac{dx_l}{A} \quad (2.16)$$

donde  $A$  es una constante de normalización. No se integra sobre  $x_0$  y  $x_t$  ya que son los puntos extremos fijos.

Se obtiene una muestra más representativa del conjunto completo de todos los posibles caminos que unen  $(x_0, z_0)$  y  $(x_t, z_t)$  haciendo  $\Delta z$  más pequeño. Sin embargo, el límite de éste proceso no existe, por lo cual es necesario una constante de normalización que dependa de  $\Delta z$ . Asumiendo esta constante, cuyo cálculo se muestra en el Apéndice 2, el propagador de la Ec. (2.16) queda como sigue

$$\langle z_t, x_t | z_0, x_0 \rangle = \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ l \rightarrow \infty}} \left( \frac{1}{A} \right)^{l+1} \int \int \dots \int e^{ik_0 S[t,0]} dx_1 dx_2 \dots dx_l, \quad (2.17)$$

donde se ha considerado un conjunto infinito no numerable de caminos. La funcional  $S[t,0]$  que aparece en la Ec. (2.17) está dada por la siguiente expresión

$$S[t,0] = \int_{z_0}^{z_t} n(z, x) ds \quad (2.18)$$

La Ec. (2.18) es una integral de línea tomada sobre la trayectoria que pasa a través de los puntos  $x_i$ , donde  $n(z, x)$  es el índice de refracción del medio inhomogéneo y  $ds$  es el elemento diferencial de longitud a lo largo del camino.

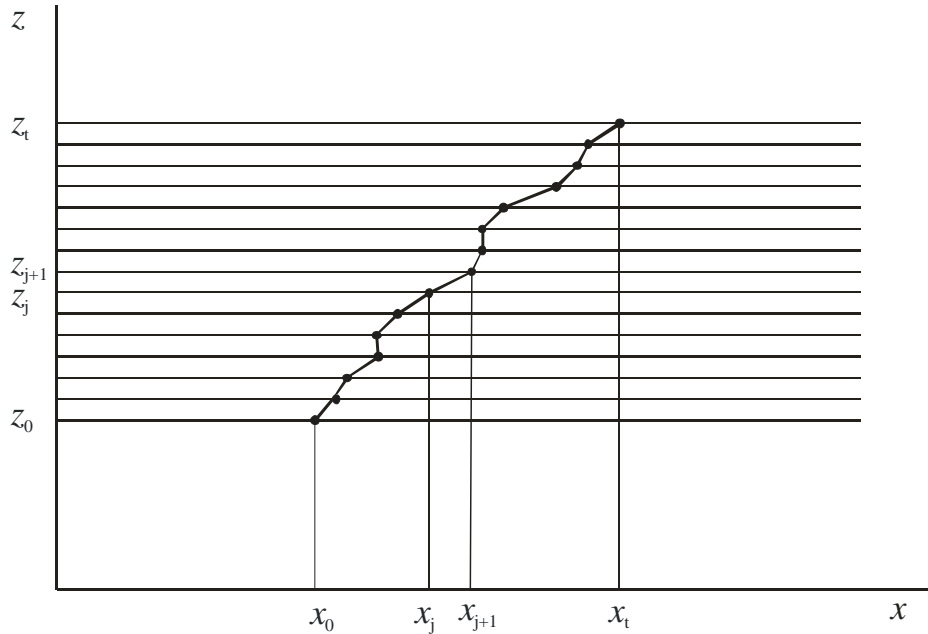


Figura 2.1: El camino es especificado dando sus coordenadas  $x$  para un gran número de valores de  $z$  separados por intervalos muy pequeños,  $\epsilon$ . La suma sobre caminos es definida como una integral sobre todas estas coordenadas especificadas. Luego, se toma el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ .



Se define el siguiente operador integral infinito-dimensional

$$\int_{x_0}^{x_t} D[x(z)] \equiv \lim_{\substack{\Delta z \rightarrow 0 \\ l \rightarrow \infty}} \left( \frac{1}{A} \right)^{l+1} \int \int \dots \int dx_1 dx_2 \dots dx_l \quad (2.19)$$

con el cual la Ec. (2.17) se expresa de la siguiente manera

$$\langle z_t, x_t | z_0, x_0 \rangle = \int_{x_0}^{x_t} e^{ik_0 S[t,0]} D[x(z)] \quad (2.20)$$

La formulación de integral de camino propuesta para calcular la amplitud compleja del campo a la salida del medio inhomogéneo debe ser compatible con el principio de Fermat. Este principio, el cual fue enunciado en el marco teórico de la Óptica de rayos, establece que los rayos ópticos que viajan entre dos puntos,  $(x_0, z_0)$  y  $(x_t, z_t)$ , siguen un camino tal que la longitud de camino óptico entre los dos puntos es un extremo (usualmente un mínimo) relativo a los caminos vecinos. Es decir, el valor de  $S$  es invariante a primer orden si el camino  $x(z)$  es modificado ligeramente. Esto se expresa matemáticamente mediante la siguiente ecuación

$$\delta S[t,0] = \delta \int_{z_0}^{z_t} n(z, x) ds = 0 \quad (2.21)$$

donde  $\delta$  significa “variación de”. Esta longitud de camino óptico estacionaria puede ser compartida por más de un camino, los cuales son seguidos simultáneamente por los rayos.

En la formulación de integral de camino que se sigue en esta tesis, el principio de Fermat restringe el infinito número de caminos posibles sobre los cuales el campo se propaga, a un cierto número de curvas que contribuyen a la amplitud total del campo final. Para encontrar la familia de curvas  $x(z)$  se resuelve la Ec. (2.21) usando cálculo de variaciones. Si se expresa  $ds$  en coordenadas cartesianas, usando la notación  $dx/dz = \dot{x}$ , la funcional  $S[t,0]$  queda como sigue

$$S[t,0] = \int_{z_0}^{z_t} n(z, x) (1 + \dot{x}^2)^{1/2} dz \quad (2.22)$$

En la derivación de la ecuación de onda (2.14) se ha restringido la aplicación del modelo teórico a medios débilmente inhomogéneos. La propagación del campo en estos

medios se produce principalmente hacia adelante, por lo cual tiene sentido usar una aproximación paraxial, tal que  $\dot{x} \ll 1$ .

### 2.2.3 Aproximación a primer orden en $\dot{x}$ del elemento diferencial de longitud de camino $ds$

La aproximación a primer orden en  $\dot{x}$  del elemento diferencial de longitud de camino  $ds$  en la Ec. (2.22) conduce a la siguiente funcional

$$S^{(1)}[t, 0] = \int_{z_0}^{z_t} n(z, x) \left( 1 + \frac{1}{2} \dot{x}^2 \right) dz \quad (2.23)$$

A partir de la aplicación de la Ec. (2.21) a la funcional de la Ec. (2.23) se llega a la siguiente ecuación diferencial a derivadas parciales no lineal que satisface la familia de curvas  $x(z)$  (Apéndice 3)

$$\frac{d}{dz} \left( n \frac{dx}{dz} \right) \approx \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial n}{\partial x} \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 \quad (2.24)$$

Dado  $n = n(z, x)$  y las condiciones iniciales,  $x(z) \big|_{z=0} = x_0$  y  $dx(z)/dz \big|_{z=0} = \theta_0$ , la Ec. (2.24) se resuelve para  $x(z)$ . Luego, evaluando los caminos  $x(z)$  en la Ec. (2.20), queda la expresión a primer orden para el propagador del campo en el medio inhomogéneo. Aplicando este propagador al campo inicial,  $\langle z_0, x_0 | \Psi \rangle$ , se calcula la amplitud del campo que llega a la segunda interfaz del medio inhomogéneo.

El campo que sale del medio inhomogéneo de la red continúa propagándose libremente hasta el plano  $z=z_f$ . Este proceso es descripto por el propagador de Fresnel

$$\langle z_f - z_t, x | z_t, x_t \rangle_F = \frac{k_0}{2\pi i(z_f - z_t)} e^{ik_0 \left[ (z_f - z_t) + \frac{(x - x_t)^2}{2(z_f - z_t)} \right]} \quad (2.25)$$

En resumen, si un campo monocromático incide sobre la primera interfaz del medio inhomogéneo  $(0, x_0)$ , se propaga hasta el plano  $(z_t, x_t)$  a través de un medio con índice de

refracción  $n(z_0, x_0)$ , y luego hasta el plano  $(z_f, x)$  en el espacio libre, la amplitud de este campo se expresa, a partir de la contribución total de todos los caminos, como sigue

$$\langle z_f - z_t, x | \Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle z_f - z_t, x | z_t, x_t \rangle_F \langle z_t, x_t | 0, x_0 \rangle \langle 0, x_0 | \Psi \rangle dx_0 . \quad (2.26)$$

Evaluando los propagadores de las Ecs. (2.20) y (2.25) en la Ec. (2.26), la amplitud del campo se escribe a continuación

$$\langle z_f - z_t, x | \Psi \rangle = \frac{t_F k_0}{2\pi i(z_f - z_t)} \int_{\mathbb{R}} e^{ik_0[(z_f - z_t) + \frac{(x - x_t)^2}{2(z_f - z_t)}]} \int_{x_0}^{x_t} e^{ik_0 S^{(1)}[t, 0]} D[x(z)] \langle 0, x_0 | \Psi \rangle dx_0 \quad (2.27)$$

donde  $t_F$  es el coeficiente de transmisión de Fresnel, aproximadamente constante suponiendo una suave modulación del índice de refracción del medio.

## 2.2.4 Aproximación a orden cero en $\dot{x}$ del elemento diferencial de longitud de camino $ds$

La aproximación a orden cero en  $\dot{x}$  del elemento diferencial de longitud de camino se expresa como  $ds \approx dz$ , y conduce a la siguiente funcional

$$S^{(0)}[t, 0] = \int_{z_0}^{z_t} n(z, x) dz \quad (2.28)$$

A partir de la aplicación de la Ec. (2.21) a la funcional de la Ec. (2.28) se llega a la siguiente ecuación diferencial a derivadas parciales no lineal para la familia de curvas  $x(z)$

$$\frac{d}{dz} \left( n \frac{dx}{dz} \right) \approx \frac{\partial n}{\partial x} \quad (2.29)$$

Para ciertos materiales ópticos las variaciones relativas del índice de refracción son del orden de  $\Delta n/n \sim 10^{-4} - 10^{-5}$ , como es el caso de los materiales fotorrefractivos. En estos medios, la Ec.(2.29) se reduce a la siguiente

$$\frac{d^2 x}{dz^2} \approx 0 \quad (2.30)$$

y los caminos  $x(z)$  sobre los que el campo se propaga son líneas rectas, con las condiciones iniciales  $x(z)]_{z=0} = x_0$  y  $dx(z)/dz]_{z=0} = \theta_0$ . Luego, evaluando estos caminos en la Ec. (2.20), queda la siguiente expresión a orden cero para el propagador del campo en el medio inhomogéneo

$$\langle z_t, x_0 | 0, x_0 \rangle = e^{ik_0 \int_0^{z_t} n(z_0, x_0) dz_0} \quad (2.31)$$

En esta aproximación de orden cero, un campo que incide normalmente ( $\theta_0 = 0$ ) sobre la primera interfaz de la red  $(0, x_0)$ , se propaga hasta el plano  $(z_t, x_0)$  a través de un medio con índice de refracción  $n(z_0, x_0)$ , y luego hasta el plano  $(z_f, x)$  en el espacio libre, tiene una amplitud dada por la siguiente ecuación [2.8]

$$\langle z_f - z_t, x | \Psi \rangle = \frac{t_F k_0}{2\pi i(z_f - z_t)} \int_{\mathbb{R}} e^{ik_0 [(z_f - z_t) + \frac{(x - x_0)^2}{2(z_f - z_t)}]} e^{ik_0 \int_0^{z_t} n(z_0, x_0) dz_0} \langle 0, x_0 | \Psi \rangle dx_0 \quad (2.32)$$

El análisis esbozado en esta sección comienza con las ecuaciones de Maxwell macroscópicas asumiendo soluciones con dependencia temporal armónica. Para problemas dependientes del tiempo, una adecuada composición de Fourier permite encontrar el observable conociendo la distribución de las componentes de Fourier dada por la Ec. (2.27) o la Ec. (2.32), según el grado de aproximación que se requiera.

Es de notar que la propagación del campo se establece de una manera formal sin especificar el medio. Luego, dadas las condiciones iniciales para el campo, el problema se reduce a la evaluación del propagador adecuado al medio inhomogéneo en particular. Para medios periódicos, como es el caso de las redes de volumen estudiadas en esta tesis, la inhomogeneidad presenta una periodicidad transversal.

Cabe mencionar que la condición que debe satisfacer el medio inhomogéneo, por la cual el índice de refracción presenta variaciones suaves en la escala de la longitud de onda, se puede establecer de forma equivalente como sigue: la longitud de onda del campo

es pequeña pero apreciable en comparación con las dimensiones sobre las cuales la inhomogeneidad del medio varía apreciablemente. Por lo tanto, el contexto en el cual el término “difracción” es usado en esta tesis, se refiere a este régimen cuasi-geométrico como límite del régimen ondulatorio.

## 2.3 Referencias

- [2.1] G. Eichmann, *Quasi-Geometric Optics of media with inhomogeneous index of refraction*, J. Opt. Soc. Am. **61** (1971) 161.
- [2.2] I.M. Besieris, *Wave-kinetic method, phase-space path integrals, and stochastic wave propagation*, J. Opt. Soc. Am. A **2**, (1985) 2092.
- [2.3] D.G. Perez and M. Garavaglia, *Intensity distribution behavior of self-image systems into turbulent media*, J. Opt. Soc. Am. A **16**, (1999) 916.
- [2.4] C. Gómez-Reino and J. Liñares, *Optical path integrals in gradient-index media*, J. Opt. Soc. Am. A **4** (1987), 1337.
- [2.5] R.R.A. Syms, *Path-integral formulation of multiple scattering problems in integrated optics*, Appl. Opt. **25** (1986) 4402.
- [2.6] D. Marcuse, *Light Transmission Optics* (Van Nostrand Reinhold, New York, 1982, Ch.1.)
- [2.7] R.P. Feynman, A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, New York, 1965).
- [2.8] G. Forte, A. Lencina, M. Tebaldi, N. Bolognini, *Self-imaging by a volume grating*, Opt. Commun. **284** (2011) 2494.

# CAPÍTULO 3

## El efecto Talbot a través de una red de volumen

---

### 3.1 Introducción

Cuando se ilumina normalmente un objeto periódico con un haz monocromático colimado, se forman en la dirección de propagación del haz y a distancias regulares, réplicas del objeto, llamadas autoimágenes. El fenómeno de autoimágenes fue reportado por primera vez por F. Talbot [3.1]. En su experiencia original usó redes de difracción iluminadas con luz blanca y encontró réplicas coloreadas localizadas en posiciones diferentes según la longitud de onda. Lord Rayleigh dio el primer tratamiento analítico al llamado efecto Talbot y calculó la distancia entre autoimágenes o distancia de Talbot,  $z_T = 2d^2/\lambda$ , donde  $d$  es el período del objeto y  $\lambda$  la longitud de onda del campo óptico [3.2].

El efecto Talbot requiere de iluminación espacialmente coherente y desaparece con el aumento de las dimensiones laterales de la fuente. Sin embargo, usando como fuente una red de amplitud iluminada con un haz espacialmente incoherente y colocada a una distancia determinada de una estructura periódica de igual período que la red, un patrón de franjas conocidas como franjas de Lau se forma a una distancia infinita de la estructura.

Al principio los objetos difractivos fueron redes de amplitud; más tarde se encontró que el uso de redes de fase garantiza baja absorción y alta eficiencia energética [3.3]. Las primeras redes de fase eran simplemente placas plano-paralelas de material dieléctrico transparente sobre una de cuyas caras se grababan surcos con una separación igual al período de la red. Luego, con el desarrollo de la tecnología de moduladores espaciales de luz (Spatial Light Modulator o SLM) programables, basados en cristal líquido o materiales fotorrefractivos, fue posible la fabricación de redes de fase y/o amplitud de perfil arbitrario.

Actualmente es bien sabido que bajo iluminación coherente, campos de ondas con periodicidad lateral exhiben, en propagación libre, una periodicidad longitudinal cuyo período es la distancia de Talbot [3.4]. Más aún, la naturaleza básica ondulatoria del fenómeno de autoimágenes ha permitido encontrar contrapartidas en el campo de la Óptica y en otros campos de la Física. Por ejemplo, el hecho de que la difracción espacial de un haz luminoso a través de un objeto semitransparente tiene un tratamiento matemático análogo a la dispersión temporal de un pulso luminoso durante su propagación en una fibra óptica, ha permitido encontrar el efecto Talbot en el dominio temporal [3.5]. A su vez, el fenómeno de autoimágenes no se restringe al rango óptico del espectro electromagnético, siempre que se utilice una red con el período adecuado a la longitud de onda de la radiación. Así es como se ha descrito éste fenómeno a partir de redes lineales y bidimensionales con un haz de rayos X “blandos” [3.6]. A su vez el efecto Talbot fue observado en procesos que involucran sistemas cuánticos, tales como la difracción de haces de macromoléculas en redes [3.7], o los “quantum revivals” en paquetes de onda Rydberg localizados [3.8], debido a la similitud formal entre la ecuación de Schrödinger y la ecuación de onda paraxial.

## 3.2 El efecto Talbot

Consideremos una red de difracción de amplitud 1D plana. Por ser una estructura periódica su transmitancia  $t(x_0, y_0)$  se puede expresar mediante un desarrollo en serie de Fourier

$$t(x_0, y_0) \equiv t(x_0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{i2\pi mx/d} \quad (3.1)$$

donde  $d$  es su período espacial. Usando la integral de Fresnel de la teoría de la difracción escalar se puede calcular la amplitud del campo a una distancia  $z$  de la red cuando se ilumina con un campo de ondas planas monocromáticas de amplitud uniforme  $A$  y número de onda  $k = 2\pi/\lambda$

$$u(x, z) = \int_{-\infty}^{\infty} A t(x_0) \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{\pi}{\lambda z}(x-x_0)^2} dx_0 \sqrt{i\lambda z} \ , \quad (3.2)$$

donde la raíz cuadrada que aparece en el integrando es resultado de integrar en  $y_0$ . Resolviendo (3.2) queda

$$u(x, z) = Ae^{ikz} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m e^{-i\pi\lambda z m^2/d^2} e^{i2\pi m x/d} \quad (3.3)$$

Comparando con la Ec. (3.1) se observa que este patrón equivale a una red 1D con el mismo período que la red original, pero distinto perfil. Por lo tanto, el campo difractado por un objeto periódico proporciona también una estructura periódica en todos los planos transversales a la dirección de propagación. Se pueden etiquetar estos patrones usando

$$\frac{\lambda z}{2d^2} = N + n \quad (3.4)$$

en la Ec. (3.3), con  $N$  entero y  $0 \leq n < 1$ . Eligiendo  $n = 0$  y para cualquier valor de  $N$ , la Ec. (3.3) se reduce a la Ec. (3.1) y se obtiene una réplica del objeto, es decir, autoimágenes positivas de la red, ubicadas en las posiciones

$$z = N \frac{2d^2}{\lambda} = Nz_T \quad (3.5)$$

donde  $z_T$  resulta ser la periodicidad longitudinal del campo o distancia de Talbot. Es de notar que la única condición para llegar a la Ec. (3.5) fue poder expresar la transmitancia del objeto en forma de un desarrollo de Fourier; esto prueba la condición *suficiente* para generar patrones de Fresnel que sean autoimágenes del objeto: que el objeto sea periódico. La condición *necesaria* se llama condición de Montgomery y se establece en el plano de frecuencias del objeto [3.9], pero no se profundizará en éstos objetos de Montgomery ya que en ésta tesis solo se usan objetos periódicos.

Para un valor fijo de  $N$ , variando  $n$  se obtienen patrones fraccionales y fractales de Talbot, intermedios entre dos autoimágenes consecutivas [3.10]. Por ejemplo, para  $n = 1/2$  se tiene

$$u_{1/2}(x) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \exp(-i\pi m^2) \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m (-1)^m \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) \quad (3.6)$$

Ahora bien, resulta que



$$u\left(x \pm \frac{d}{2}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m \exp\left(i2\pi m \frac{x \pm (d/2)}{d}\right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} C_m (-1)^m \exp\left(i2\pi m \frac{x}{d}\right) = u_{1/2}(x) \quad (3.7)$$

es decir que se obtiene un patrón idéntico a la red pero desplazado lateralmente medio período respecto de la misma. Estos patrones se llaman autoimágenes negativas o de contraste invertido, porque para una red binaria con perfil de onda cuadrada o red de Ronchi, desplazar medio período equivale a obtener su negativo. Entre dos autoimágenes positivas siempre hay una negativa equidistante, y viceversa.

Más aún, se puede probar que

$$u_n(x, y) = u_{1-n}^*(x, y), \quad (3.8)$$

es decir, los patrones de índice  $n$  y  $1-n$  de una red (y de un objeto de Montgomery en general) de transmitancia real tienen el mismo perfil de irradiancia, de manera tal que todos los patrones de Fresnel del objeto diferentes se van a ubicar entre una cualquiera de sus autoimágenes de índice  $N$  y un patrón de índice  $N + n = N + 1/2$ .

Los objetos periódicos que más se han estudiado desde el punto de vista de sus propiedades difractivas han sido las redes con perfil sinusoidal, ya sea de amplitud como de fase. Sin embargo, un resultado más general y con un tratamiento matemático simple, se obtiene cuando se elige una red de Ronchi, ya que a partir del Teorema de Fourier, se la puede considerar como una superposición de redes sinusoidales, cada una con su factor de peso dado por el coeficiente de Fourier. Cuando una red de Ronchi se ilumina normalmente con un haz paralelo, la irradiancia del campo en el plano intermedio entre autoimágenes sucesivas, una positiva y otra negativa, es constante. Estos planos de campo uniforme corresponden a  $n = 1/4$  o  $n = 3/4$ , para los cuales el perfil de irradiancia es idéntico (Ec.3.8), por lo que es suficiente tomar uno de ellos, por ejemplo,  $n = 1/4$ . La transmitancia en amplitud  $t(x_0)$  de una red de Ronchi viene dada por

$$t(x_0) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\pi m/2)}{\pi m} \exp\left(i2\pi m \frac{x_0}{d}\right) = \frac{1}{2} + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\text{sen}(\pi m/2)}{\pi m} \cos\left(2\pi m \frac{x_0}{d}\right) \quad (3.9)$$

y usando (3.3) la amplitud del patrón antes mencionado resulta

$$u_{\frac{1}{4}}(x) = \frac{1}{2} - 2i \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi m/2)}{\pi m} \cos\left(2\pi m \frac{x}{d}\right) = \frac{1}{2} - i \left(t(x) - \frac{1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1-i), & \text{si } t(x) = 1 \\ \frac{1}{2}(1+i), & \text{si } t(x) = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

La Ec. (3.10) describe una distribución de amplitud periódica y binaria, en la que los dos valores que toma esta magnitud están desfasados entre sí en  $\pi/2$  y cuya visibilidad es nula ya que su irradiancia es constante,  $|u_{\frac{1}{4}}(x)|^2 = 1/2$ .

Las redes de fase pura generan, bajo iluminación coherente, patrones de Fresnel de alto contraste con una distribución de irradiancia periódica. Por ejemplo, una red de fase binaria, cuadrada y con salto de fase en  $\pi/2$  [3.11]. La transmitancia en amplitud  $t'(x_0)$  de esta red se puede expresar como

$$t'(x_0) = \exp\left[i \frac{\pi}{2} t(x_0)\right] \quad (3.11)$$

donde  $t(x_0)$  es la transmitancia en amplitud de la red de Ronchi, Ec. (3.9), del mismo período. Los patrones de Fresnel de esta red de fase son esencialmente los mismos que los generados por la red de amplitud con igual perfil de transmitancia. Debido a las propiedades de simetría y periodicidad, todos los patrones de Fresnel de una red de fase binaria, cuadrada y de modulación  $\pi/2$ , caracterizados por un índice  $N+n$ , con  $n = 1/4$  o  $3/4$  y  $N$  entero, son patrones binarios de alto contraste. La Tabla 3.1 resume el conjunto de patrones generados por una red de amplitud y una red de fase

$n$	Red de amplitud	Red de fase
0	Autoimagen positiva	Intensidad uniforme
$\frac{1}{8}$	Alta visibilidad positiva	Alta visibilidad positiva
$\frac{1}{4}$	Intensidad uniforme	Autoimagen positiva
$\frac{3}{8}$	Alta visibilidad negativa	Alta visibilidad positiva
$\frac{1}{2}$	Autoimagen negativa	Intensidad uniforme
$\frac{5}{8}$	Alta visibilidad negativa	Alta visibilidad negativa
$\frac{3}{4}$	Intensidad uniforme	Autoimagen negativa
$\frac{7}{8}$	Alta visibilidad positiva	Alta visibilidad negativa
1	Autoimagen positiva	Intensidad uniforme

Tabla 3.1: Secuencia de patrones de Fresnel fraccionales para una red de amplitud y una red de fase, ambas planas.

Antes de estudiar el efecto Talbot en una red volumen conviene resaltar otro aspecto asociado, en particular, a redes planas de fase. Como se dijo antes, estas redes muestran una mayor eficiencia, en particular para ciertas amplitudes de modulación. En efecto, Tu Jinhong demostró la dependencia sinusoidal que presenta la visibilidad de las autoimágenes con la amplitud de modulación, con lo cual, en teoría, se obtiene un máximo contraste para una amplitud de modulación de la red de  $\pi/2$ , como muestra la Figura 3.1 [3.11].

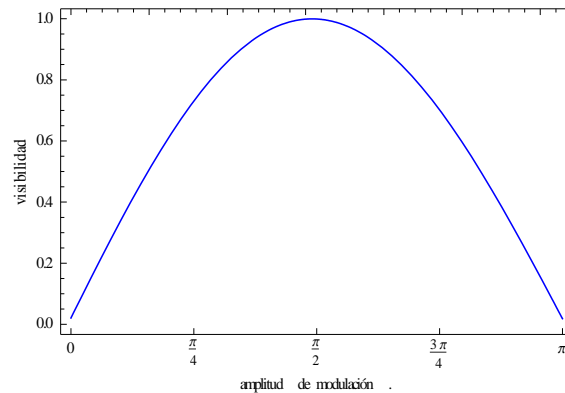


Figura 3.1: Visibilidad (plano  $n = \frac{1}{4}$ ) vs. amplitud de modulación de la red de fase

### 3.3 Aplicación del modelo de integral de camino al efecto Talbot con una red de volumen. Resultados

Como se dijo al final del Capítulo 2, una propuesta de ésta tesis es el cálculo de la amplitud del campo difractado por una red de volumen usando la formulación de integral de camino desarrollada en la Sección 2.2. En este capítulo, el modelo se testea en situaciones físicas conocidas para verificar su validez. Luego, se trata con medios periódicos de volumen binarios con periodicidad 1D transversal. En todos los casos, un campo de ondas planas con número de onda  $k_0$  y amplitud unitaria, incide perpendicularmente sobre la cara anterior de un objeto de caras plano-paralelas de espesor  $L_z$ . La amplitud del campo transmitido es calculado a una distancia  $z = z_f - z_t$  desde la cara posterior del objeto.

#### 3.3.1 Medios homogéneos

Primero consideramos un medio absorbente puro, homogéneo y lineal, caracterizado por un índice de refracción imaginario puro y constante,  $n(z_0, x_0, y_0) = i n_1$ . Usando la Ec. (2.32) se obtiene

$$\langle z, x, y | \Psi \rangle = t_F e^{-k_0 n_1 L_z} e^{i k_0 z} \quad (3.12)$$

que representa la atenuación de la amplitud del campo dependiente de la profundidad a la que se propagó en el medio. Como era de esperar, se cumple la ley de Beer.

Como un segundo ejemplo, se aplica el propagador dado por la Ec. (2.31) a un índice de refracción real y constante, correspondiente a, por ejemplo, un medio dieléctrico transparente lineal y homogéneo. Luego, la amplitud del campo resulta

$$\langle z, x, y | \Psi \rangle = t_F e^{i k_0 n_0 L_z} e^{i k_0 z}; \quad (3.13)$$

como se espera para un objeto de fase pura, el campo adquiere un corrimiento de fase uniforme a medida que se propaga a través del medio.

Con éstos ejemplos, queda demostrada la habilidad del modelo para reproducir algunos resultados esperados.

### 3.3.2 Red de amplitud de volumen

Ahora, el modelo se aplica a una red de amplitud de volumen, con una absorción modulada espacialmente, representada por un índice de refracción periódico complejo,

$$n(z_0, x_0) = n_0 + i(n_1 + \delta n_a t(x_0)) \quad (3.14)$$

donde  $n_0$  y  $n_1$  son los valores medios del índice de refracción real e imaginario, respectivamente,  $\delta n_a$  es la amplitud de modulación de absorción, y las variaciones transversales 1D a lo largo de la dirección  $x$  son descriptas por una función binaria cuadrada con período  $d$ ,

$$t(x_0) = \frac{1}{2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi m/2)}{\pi m} \cos\left(2\pi m \frac{x_0}{d}\right). \quad (3.15)$$

Es bien sabido que los campos coherentes con periodicidad transversal exhiben, en propagación libre, una periodicidad longitudinal. Por lo tanto, es suficiente con estudiar los patrones de difracción ubicados dentro de un período longitudinal, es decir, entre planos de autoimágenes sucesivos. El modelo predice que estos patrones están ubicados en  $z = (1+n)z_T$ , donde  $z_T = 2d^2/\lambda$  es la distancia de Talbot y  $n$  es un número real entre 0 y 1. La amplitud de los patrones intermedios generados por ésta red de volumen está dada, según el propagador de la Ec. (2.31), por

$$\langle (1+n)z_T, x, \gamma | \Psi \rangle = \frac{(1+e^{-\gamma})}{2} + 2(1-e^{-\gamma}) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi m/2)}{\pi m} \exp(-i2\pi m^2 n) \cos\left(2\pi m \frac{x}{d}\right) \quad (3.16)$$

donde  $\gamma = k_0 \delta n_a L_z$  es el parámetro absorbente y la amplitud está normalizada por  $t_F e^{ik_0(1+n)z_T} e^{-k_0 L_z n_1} e^{ik_0 L_z n_0}$ .

Es evidente a partir de la ecuación (3.16) que cada componente de Fourier de  $t(x_0)$  adquiere una fase periódica longitudinal que asegura la formación de autoimágenes. Además, la fórmula de Rayleigh para la distancia de Talbot permanece inalterada. Sin embargo, a diferencia de lo que ocurre con una red plana, la función periódica resultante es modulada por un factor relacionado con el parámetro absorbente, el cual, como se verá a continuación, explica la visibilidad de los patrones.

La visibilidad se define en forma análoga al caso de redes planas, pero ahora con una dependencia respecto al parámetro de volumen  $\gamma$ ,

$$V(\gamma) = \frac{Abs \left[ \left| \langle (I+n)z_T, 0, \gamma | \Psi \rangle \right|^2 - \left| \langle (I+n)z_T, d/2, \gamma | \Psi \rangle \right|^2 \right]}{\left| \langle (I+n)z_T, 0, \gamma | \Psi \rangle \right|^2 + \left| \langle (I+n)z_T, d/2, \gamma | \Psi \rangle \right|^2}. \quad (3.17)$$

Esta definición carece de ambigüedad si hay un máximo y un mínimo de amplitud en cada período, y ellos corresponden a  $x_i=0$  and  $x_i=d/2$ , respectivamente.

Analicemos la localización axial y la calidad de los patrones de alta visibilidad generados por la red de volumen [3.12]. A partir de la Ec. (3.16), es evidente que los patrones de difracción son similares a aquellos obtenidos con una red de amplitud plana, pero con el parámetro absorbente controlando tanto el nivel “bias” como la visibilidad. Es de notar que cuando  $n=0$  y  $n=1$  se forman autoimágenes; con  $n=0.5$  las autoimágenes están desplazadas lateralmente en medio período;  $n=0,25$  y  $n=0,75$  producen una distribución de intensidad uniforme. Otra característica de las imágenes de Fresnel de ésta red es que para  $n=0,125$  y  $n=0,875$  parecen autoimágenes pero con una menor visibilidad. De igual manera, imágenes de alta visibilidad desplazadas lateralmente aparecen para  $n=0,375$  y  $n=0,625$ . La Tabla 3.2 muestra el perfil de los patrones calculados con  $n=0$  y  $n=0,125$  para diversos valores del parámetro absorbente. Es aparente que a medida que  $\gamma$  aumenta se observa un remarcable aumento de la visibilidad. Como era de esperar, para  $n=0,25$  la intensidad de la distribución uniforme disminuye a medida que aumenta  $\gamma$ . La figura 3.2 muestra la visibilidad como función de  $\gamma$  para tres diferentes localizaciones axiales de los patrones de difracción,  $n=0$ ,  $n=0,125$  y  $n=0,25$ . Se observa una calidad creciente de las imágenes de alta visibilidad con el aumento del parámetro absorbente, resultado de una absorción creciente en la propagación de la onda plana a través de las regiones opacas de la red de volumen.

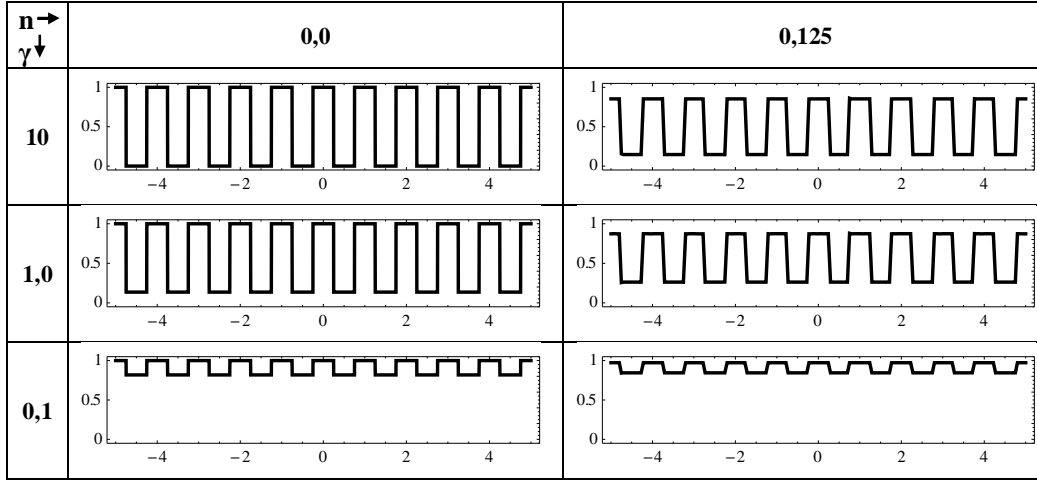


Tabla 3.2: Amplitud de los patrones de Fresnel normalizados a una distancia de Talbot fraccional  $z = (1+n)z_T$ , con  $n=0$  (plano de autoimagen) y  $n=0,125$  (plano de réplica con menor visibilidad).

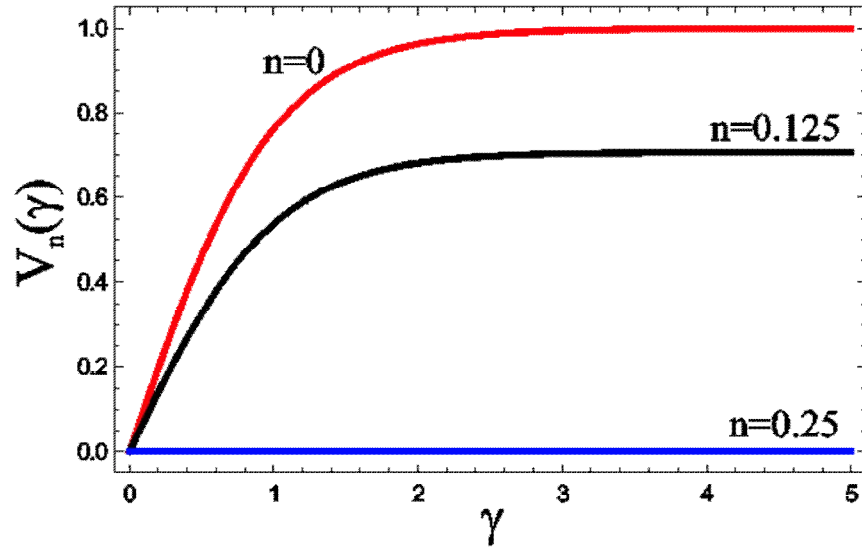


Figura 3.2: Visibilidad  $V_n$  en términos de  $\gamma$  ( $\gamma = k_0 \delta n_a L_z$ ) para diferentes localizaciones axiales de los patrones de Fresnel.

Es interesante recalcar que  $\gamma$  está relacionado no solamente con el espesor del medio sino también con la amplitud de modulación de absorción, lo cual nos permite obtener los mismos resultados con una red gruesa y baja modulación de absorción, que con una red delgada y alta modulación de absorción. El parámetro  $\gamma$  podría ser identificado con el

parámetro de modulación  $\nu$  mencionado en el trabajo de M.G. Moharam and L. Young [3.13], donde se establecen las condiciones en las que una red de volumen se comporta en el régimen de difracción de Bragg y de Raman-Nath. Desde éste punto de vista, es claro que las autoimágenes son sintetizadas por múltiples órdenes difractados, correspondiendo al régimen de Raman-Nath, en el cual una cantidad apreciable de energía es transferida a los modos más altos. El régimen de Raman-Nath es satisfecho para  $\gamma$  suficientemente alto debido a un valor grande de  $\delta n_a$ , más allá del espesor de la red,  $L_z$ . A su vez,  $\gamma$  puede ser alto debido a un gran espesor  $L_z$  y una baja modulación. Sin embargo, en éste caso el período de la red  $d$  ha de ser lo suficientemente largo de manera tal de mantener el régimen de Raman-Nath.

La calidad de las imágenes de alta visibilidad resulta pobre en el límite  $\gamma \rightarrow 0$  correspondiendo a  $\delta n_a$  y/o  $L_z$  suficientemente pequeño. En el primer caso, para un espesor fijo,  $\delta n_a$  es tan baja que la visibilidad tiende a cero. En el segundo caso, para un valor arbitrario de  $\delta n_a$ , si  $L_z \rightarrow \lambda/2\pi$  entonces  $\gamma \rightarrow \delta n_a$  y la visibilidad depende de este último parámetro, como ocurre con las redes planas, las cuales tienen un espesor finito. A su vez, si  $\delta n_a \rightarrow 0$ , entonces la visibilidad se anula. De esta manera el comportamiento que muestra la visibilidad de una red plana se obtiene como límite de aquel calculado para la red de volumen.

En resumen, es necesario tener en cuenta el espesor de la red, la amplitud de modulación de absorción y el período de la red para estudiar la calidad de las autoimágenes generadas por una red de amplitud de volumen.

### 3.3.3 Red de fase de volumen

En ésta sección el modelo es aplicado a un índice de refracción periódico complejo describiendo una red de fase de volumen dada por

$$n(z_0, x_0) = n_0 + \delta n_f t(x_0) + i n_l \quad (3.18)$$



donde  $\delta n_f$  es la amplitud de modulación de fase y  $n_0$ ,  $n_1$  and  $t(x_0)$  fueron definidos en la Sección 3.3.2. El campo difractado calculado por el modelo da patrones intermedios de Talbot descriptos por

$$\langle (1+n)_{z_T, x, \beta} | \Psi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{(e^{i\beta} - 1)}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2} + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi m/2)}{\pi m} \exp(-i 2\pi m^2 n) \cos\left(2\pi m \frac{x}{d}\right) \right) \quad (3.19)$$

donde  $\beta = k_0 \delta n_f L_Z$  es el parámetro refractivo el cual es proporcional al espesor del medio y a la amplitud de modulación de fase. La misma normalización usada en la Ec. (3.16) es usada.

La Ec. (3.19) reproduce las características encontradas en los patrones generados por una red de fase plana, pero modificados por el parámetro refractivo  $\beta$  [3.12]. Los patrones para  $n=0,25$  y  $n=0,75$  corresponden a autoimágenes, la primera positiva y la segunda negativa. Para  $n=0$  y  $n=0,5$  los patrones constituyen una distribución de amplitud uniforme. A distancias correspondientes a  $n=0,125$  y  $n=0,375$  la distribución de amplitud mantiene su forma de onda cuadrada pero con menor visibilidad que las autoimágenes. Los patrones para  $n=0,625$  y  $n=0,875$  son patrones binarios de menor visibilidad que las autoimágenes pero negativos. La Tabla 3.3 muestra el perfil de los patrones calculados con  $n=0,25$  y  $0,125$ , para diferentes valores del parámetro refractivo. La Figura 3.3 describe la visibilidad, definida por la Ec. (3.17), en términos de  $\beta$ , para tres diferentes localizaciones axiales del patrón de difracción,  $n=0$ ,  $n=0,125$  y  $n=0,25$ . La visibilidad de éstos patrones alcanza un máximo en  $\beta=\pi/2$ , un comportamiento ya observado estudiando la formación de autoimágenes por una red de fase binaria plana, donde la visibilidad es sólo dependiente de la amplitud de modulación de fase. Es de notar que el parámetro  $\beta$  introduce otro grado de libertad en la visibilidad. Ahora, es posible obtener una visibilidad máxima con una amplitud de modulación de fase menor a  $\pi/2$ , compensando de ésta manera con  $L_Z$ . Amplitudes de modulación de fase tan pequeñas como  $10^{-5}$  son encontradas en medios fotorrefractivos, en cuyo caso un valor de  $L_Z$  del orden de 1 cm da un valor de  $\beta \approx \pi/2$ .

$n \rightarrow$ $\beta \downarrow$	0,25	0,125
$\pi/8$		
$\pi/4$		
$\pi/2$		

Tabla 3.3: Amplitud de los patrones de Fresnel normalizados a una distancia de Talbot fraccional  $z = (1+n)z_T$ , con  $n=0,25$  (plano de autoimagen) y  $n=0,125$  (plano de réplica con menor visibilidad).

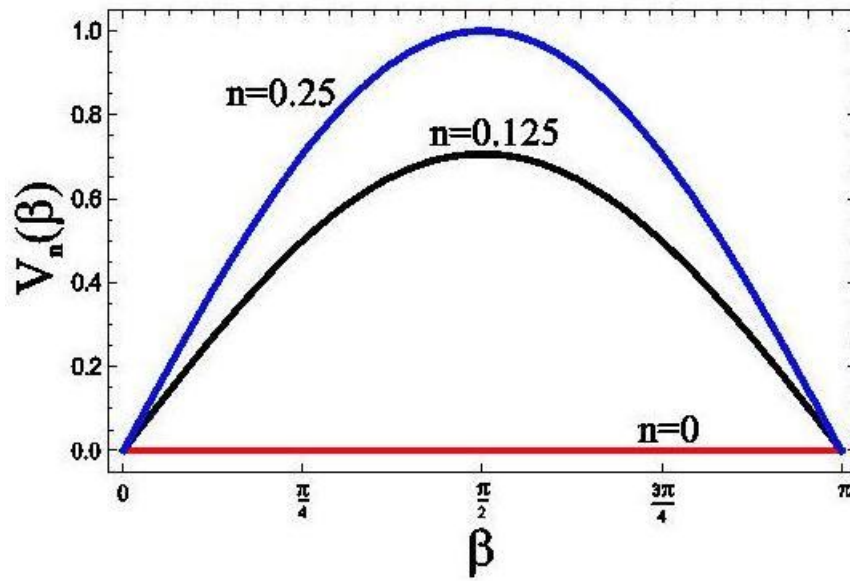


Figura 3.3: Visibilidad  $V_n$  en términos de  $\beta$  ( $\beta=k_0\delta n_f L_z$ ) para diferentes localizaciones axiales de los patrones de Fresnel.

### 3.3.4 Red compleja de volumen

#### 3.3.4.1 Partes real e imaginaria en fase

Consideremos un objeto que cambia la amplitud y fase de la luz transmitida a través de éste, representado por un índice de refracción con modulaciones periódicas real e imaginaria en fase. Tal objeto está descripto por

$$n(z_0, x_0) = n_0 + \delta n_f t(x_0) + i(n_1 + \delta n_a t(x_0)) \quad (3.20)$$

donde todos los parámetros y funciones tienen el significado definido antes. El campo difractado calculado usando la Ec. (2.32) resulta en una amplitud de los patrones intermedios de Talbot expresada por

$$\langle (1+n)_{z_T, x, \gamma, \beta} | \Psi \rangle = \frac{e^{-\gamma}}{\sqrt{2}} + \frac{(e^{i\beta} - e^{-\gamma})}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{2} + 2 \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi m/2)}{\pi m} \exp(-i 2 \pi m^2 n) \cos\left(2 \pi m \frac{x}{d}\right) \right) \quad (3.21)$$

donde  $\gamma$  y  $\beta$  son los parámetros antes mencionados, y el factor de normalización es el mismo que el usado en la Ec. (3.16).

Hay diferencias interesantes entre el patrón de intensidad de Fresnel generado por objetos complejos de volumen y el patrón generado por objetos de amplitud o fase de volumen [3.12]. Como en los casos previos, para estudiar el comportamiento de ésta red compleja se usa la visibilidad como una herramienta matemática para caracterizar los patrones. Como ya fue mostrado,  $n=0$ ,  $n=0,125$ ,  $n=0,250$  y  $n=0,375$  son planos notorios y se profundizará su análisis.

La Figura 3.4 muestra la visibilidad de los patrones en términos de  $\beta$  y  $\gamma$ , para los diferentes planos. Es de notar que, para  $n=0$  (ver Figura 3.4a) se obtienen autoimágenes de la parte imaginaria del índice de refracción complejo, siempre que  $\gamma \geq 3$ , más allá de los valores de  $\beta$ . Este resultado se entiende recordando que para  $n=0$  solo la modulación de amplitud de la red contribuye a la formación de autoimágenes, siendo éste un plano de intensidad uniforme para la modulación de fase de la red. Por otra parte, para  $n=0,250$  (ver Figura 3.4c) la contribución principal al patrón proviene de la parte real del índice de refracción complejo pero es fuertemente afectada por la absorción producida por la

modulación de la parte imaginaria. En particular, a partir de la Figura 3.4c, se observa que solo se obtiene una autoimagen para  $\gamma \rightarrow 0$ . Hasta aquí, teniendo en cuenta que las autoimágenes se forman a las distancias de Talbot predichas, los resultados para  $n=0$  y  $n=0,250$  son los esperados. Sin embargo, también aparece una autoimagen para  $n=0,125$  (ver Figura 3.4b) donde la visibilidad alcanza la unidad para  $\beta=\pi/2$  y el irracional  $\gamma = \ln(1 + \sqrt{2}) = 0.881374$ . Este comportamiento llamativo puede ser entendido recordando que ambas modulaciones periódicas, real e imaginaria, tienen cada una un plano de alta visibilidad en esa posición; luego, superpuestas en fase contribuyen a formar una autoimagen. Otro resultado notorio se observa en la Figura 3.4d, correspondiente a la visibilidad para  $n=0,375$ . En este plano, la modulación real genera un patrón positivo de alta visibilidad, mientras que la parte imaginaria genera un patrón de alta visibilidad pero negativo; el efecto de la superposición en fase de ambas modulaciones de la red es la formación de un plano de uniformidad en  $n=0,375$  para ciertos valores de los parámetros. Estos resultados singulares, para  $n=0,125$  y  $n=0,375$ , constituyen una característica propia de la red compleja.

El comportamiento de la red compleja es idéntico para  $n$  y  $n' = n + 0.5$ , con  $n = 0, 0,125, 0,250$  y  $0,375$ .

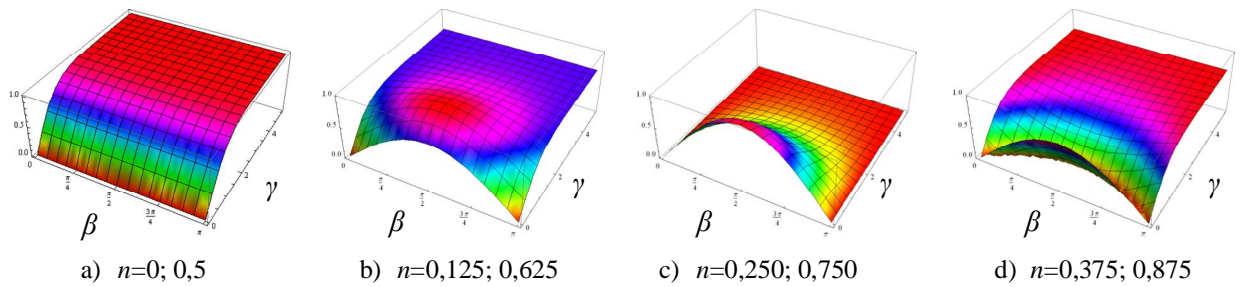


Figura 3.4: Visibilidad  $V_n$  en términos de  $\beta$  y  $\gamma$ , para diferentes localizaciones axiales de los patrones de Fresnel.

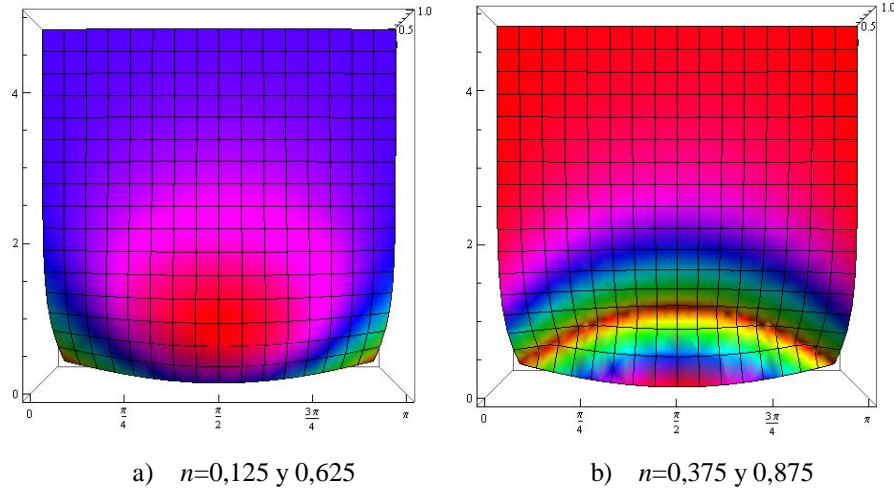


Figura 3.5: Visibilidad  $V_n$  en términos de  $\beta$  y  $\gamma$  para los nuevos planos de a) autoimagen y b) uniformidad, obtenidos a partir de una red compleja de volumen con ambas modulaciones en fase.

### 3.3.4.2 Partes real e imaginaria fuera de fase

Un paso adelante en el estudio de la red compleja de volumen es considerar un desplazamiento de fase relativo entre las modulaciones de amplitud y fase [3.12]. El índice de refracción que describe éste medio es

$$n(z_0, x_0) = n_0 + \delta n_f t(x_0 + pd) + i(n_1 + \delta n_a t(x_0 + qd)) \quad (3.22)$$

donde  $p$  y  $q$  son números reales entre -1 y 1. En primer lugar, se considera la amplitud de los patrones con  $p=0$  y  $q$  variando entre 0 y 1, para cualquier valor de  $\gamma$  y  $\beta$ . En el plano  $n=0$  se obtienen las autoimágenes de la parte absorbente de la red, desplazada en  $qd$ . A su vez, las autoimágenes de la parte de fase no desplazada de la red son encontradas en el plano  $n=0,25$ . Sin embargo, para  $n=0,125$  el patrón puede ser no binario como consecuencia de la interacción entre las modulaciones de fase y amplitud. Este patrón resulta particularmente interesante cuando  $\gamma \approx 3$  y  $\beta = \pi/2$ . En éste caso, como se observa en la Tabla 3.4, fijando  $q=0$  el resultado con las partes real e imaginaria en fase es recuperado. A medida que  $q$  aumenta desde 0 a 0,5, el perfil de intensidad se aproxima a un “peine” de amplitud sobre un fondo uniforme. Para  $q=0,5$ , ambas modulaciones en la red están medio período fuera de fase y un patrón uniforme es encontrado. Para  $q$  entre 0,5 y 1, los patrones se repiten en una secuencia simétrica respecto de  $q=0,5$ . Debido a la periodicidad y simetría de la red, se

obtienen los mismos resultados para  $p=0$  y  $q$  variando entre 0 y -1, para  $\gamma \gtrsim 3$  y  $\beta=\pi/2$  en los planos antes mencionados.

Luego, se consideran los perfiles con  $q=0$  y  $p$  variando desde 0 a -1, para cualquier valor de  $\gamma$  y  $\beta$ . En el plano  $n=0,25$  se obtienen las autoimágenes de la parte de fase desplazada de la red. Además, las autoimágenes no desplazadas de la parte de amplitud de la red son encontradas en el plano  $n=0$ . Para  $n=0,125$ , el patrón es no binario y tiene características similares que para  $q \neq 0$  y  $p=0$ . Los mismos resultados son obtenidos para  $q=0$  y  $p$  variando entre 0 y 1, para  $\gamma \gtrsim 3$  y  $\beta=\pi/2$  en los planos previamente mencionados.

Cabe mencionar que el caso en que  $q$  varía y  $p$  permanece fijo, y viceversa, corresponde al mismo desplazamiento relativo entre modulaciones. Sin embargo, debe ser enfatizado que es posible detectar qué parte de la red, real o imaginaria, es desplazada con solo inspeccionar los planos de autoimágenes.

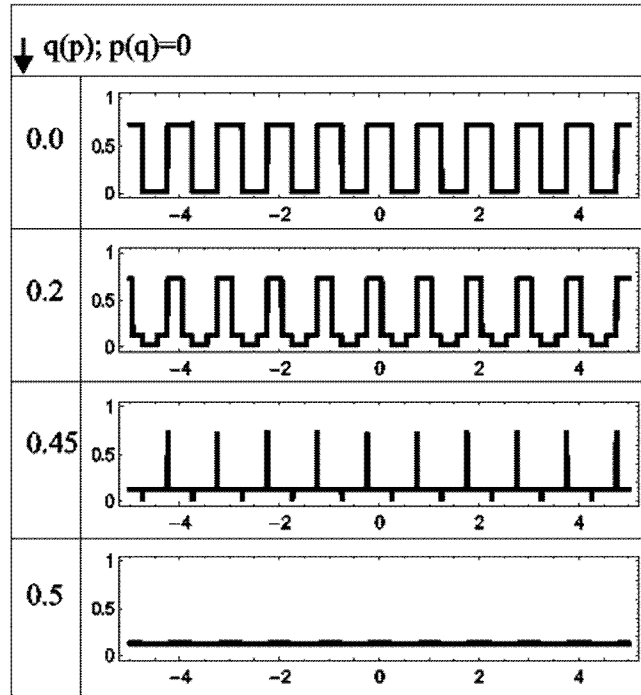


Tabla 3.4: Amplitud de los patrones de Fresnel normalizados, a una distancia de Talbot fraccional  $z = (1+n)z_T$ , con  $n=0,125$ ,  $\gamma \gtrsim 3$  y  $\beta=\pi/2$ .

## 3.4 Referencias

- [3.1] H. F. Talbot, *Facts relating to Optical Science No. IV*, Philos. Mag. **9** 401 (1836).
- [3.2] Lord Rayleigh, *On copying diffraction-grating, and on some phenomena connected therewith*, Philos. Mag. **11**, 197-205 (1880).
- [3.3] J.M. Cowley and A.F. Moodie, *Fourier Images IV: The Phase Grating*, Proc. Phys. Soc. B, **76**, 378 (1960).
- [3.4] K. Patorski, *The self-imaging phenomenon and its applications*, Prog.Opt. 27 (Ed. Emil Wolf, Nort-Holland, Amsterdam, 1989).
- [3.5] T. Janson and J. Janson, *Temporal self-imaging effect in single mode optical fiber*, J. Opt. Soc. Am. **71**, 1373 (1981).
- [3.6] V. V. Aristov, S. Aoki, A.I. Erko, S.Kikuta, V.V. Martynov, *Observation of Fourier images in soft X-ray radiation*, Opt. Commun. **56**, 223-225 (1985).
- [3.7] B. Brezger, L. Hackermuller, S. Uttenthaler, J. Petschinka, M. Arndt and A. Zeilinger, available from: arXiv:quant-ph/0202158v1 (2002).
- [3.8] J.H. Eberly, N.B. Narozhny, and J.J. Sanchez-Mondragon, *Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model*, Phys. Rev. Lett., **44**, 1323( 1980).
- [3.9] W. D. Montgomery, *Self-imaging objects of infinite aperture*, J. Opt. Soc. Am. **57**, 772-778 (1967).
- [3.10] M. V. Berry and S. Klein, *Integer, fractional and fractal Talbot effects*, J. Mod. Optics, **43**, 2139–2164 (1996).
- [3.11] T. Jinhong, *The diffraction near fields and Lau effect of a square-wave modulated phase grating*, J. Mod. Opt. **35**, 1399-1408 (1988).
- [3.12] G. Forte, A. Lencina, M. Tebaldi, N. Bolognini, *Self-imaging by a volume grating*, Opt. Commun. **284** (2011) 2494.
- [3.13] M.G. Moharam and L. Young, *Criterion for Bragg and Raman-Nath diffraction regimes*, App. Opt. 17 (1978) 1757.

# CAPÍTULO 4

## Redes de volumen fotorrefractivas

---

### 4.1 Introducción

Una región finita del espacio ocupada con un medio material cuyo índice de refracción varía periódicamente en una o más direcciones es una red de volumen. El gradiente de índice de refracción del medio puede ser originado a partir de diversos fenómenos físicos, determinando el tipo de red de volumen que se esté considerando.

En algunos casos, una onda sonora viajera o estacionaria incide sobre un medio homogéneo creando zonas de compresión y rarefacción periódicas. Las variaciones en la densidad del material se traducen en variaciones del índice de refracción cuando un haz de luz incide sobre el medio, formando lo que se conoce como una red acusto-óptica. Estas variaciones en el índice de refracción que tienen lugar en el efecto acusto-óptico se producen de manera controlada, por lo que es común decir que la luz es controlada por el sonido.

En otros casos, un campo eléctrico de baja frecuencia o estacionario se aplica a ciertos materiales transparentes anisotrópicos modificando sus índices de refracción a través del llamado efecto electro-óptico. El campo eléctrico aplicado puede tener una variación periódica en una o más direcciones del espacio; este patrón periódico se imprime en el material creando lo que se conoce como una red electro-óptica. La luz que incide en esta red difracta en todo el volumen.

A su vez, en los materiales fotorrefractivos la absorción de luz crea un campo eléctrico interno, el cual a su vez inicia el efecto electro-óptico que altera las propiedades ópticas del medio. Un patrón de intensidad luminosa, coherente o incoherente, que incide sobre éstos materiales crea una red de índice de refracción, holográfica o no holográfica, respectivamente, a partir del llamado efecto fotorrefractivo. Luego, los dispositivos fotorrefractivos permiten que un haz de luz sea controlado por otro haz de luz.

En esta tesis se utilizan redes almacenadas en materiales fotorrefractivos como redes de volumen, por lo cual es necesario estudiar en profundidad los fenómenos físicos



involucrados en la formación de la red. Para ello se analiza el efecto fotorrefractivo, en el cual se describe, a partir del modelo de transporte de bandas, el mecanismo de fotoconducción que conduce a la formación de un campo eléctrico interno [4.1]; luego, el efecto electro-óptico lineal que da origen a la red de índice fotorrefractiva [4.2].

## 4.2 El efecto fotorrefractivo

### 4.2.1 Antecedentes

El efecto fotorrefractivo es un fenómeno en el cual el índice de refracción local de un medio es cambiado por la iluminación de un haz de luz con variación espacial en su intensidad. El efecto fue descubierto en el año 1966 cuando investigadores de la compañía Bell estudiaban la transmisión de haces láser a través de cristales de Niobato de Litio ( $\text{LiNbO}_3$ ) y Tantalato de Litio ( $\text{LiTaO}_3$ ) [4.3]. Observaron que la presencia de un haz laser dentro de estos cristales produce una inhomogeneidad en el índice de refracción, el cual distorsiona el frente de onda del haz transmitido. El mismo efecto fue observado luego en otros cristales electro-ópticos tales como  $\text{BaTiO}_3$ ,  $\text{KNbO}_3$ ,  $\text{Sr}_{1-x}\text{Ba}_x\text{Nb}_2\text{O}_6$  (SBN),  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  (BSO),  $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$  (BGO) y GaAs.

Más tarde Chen y sus colaboradores mostraron que tales materiales pueden ser utilizados para almacenar una alta densidad de datos mediante el registro óptico holográfico [4.4]. Luego el mismo Chen propuso el primer modelo de migración de cargas, específico para cristales ferroeléctricos, en el cual sienta las bases físicas de este fenómeno [4.5]. Amodei dio un paso más allá al demostrar que la migración de cargas por el proceso de difusión es fundamental en el registro holográfico con períodos de la red suficientemente pequeños [4.6]. Propuso además expresiones para el campo de carga espacial generado por difusión y por arrastre de portadores (“drift”), en hologramas de ondas planas en volumen.

El descubrimiento de materiales con alta sensibilidad tales como el BSO y BGO hicieron posible el desarrollo de aplicaciones de holografía en tiempo real, aprovechando la reversibilidad debido a la ausencia de fatiga que muestran estos medios [4.7].

Un modelo completo que describa el comportamiento de los cristales fotorrefractivos fue presentado por Kukhtarev en el año 1979 [4.8]. El modelo, basado en el transporte de bandas, describe la formación de una red de índices que replica la distribución de luz incidente y explica las propiedades de acoplamiento y transferencia de

energía. Además, incluye la aplicación de un campo eléctrico externo y el efecto fotovoltaico de volumen. Desde su propuesta, ha sido utilizado para describir el efecto fotorrefractivo, tanto en materiales ferroeléctricos ( $\text{LiNbO}_3$ ,  $\text{BaTiO}_3$ , etc.) como en paraeléctricos (BSO, BGO, BTO, etc.). Es el sustento teórico de muchas aplicaciones tales como la amplificación coherente de señales, holografía de contornos, operaciones de procesamiento óptico e interferometría holográfica, todas realizadas en tiempo real.

## 4.2.2 Materiales fotorrefractivos: propiedades físicas de los silenitas

Los cristales de la familia de los silenitas  $\text{Bi}_{12}\text{XO}_{20}$ , donde X es Si en el caso del BSO, Ge en el BGO y Ti en el BTO, se crecen en el laboratorio a partir de una mezcla estequiométrica de óxidos de  $\text{Bi}_2\text{O}_3$  y  $\text{XO}_2$  en proporción 6 a 1. Los cristales son de color naranja amarronado, virando al naranja claro, si tienen suficiente espesor, que se debe a una absorción relativamente fuerte en el azul y el verde.

Una característica de éstos compuestos es que en la oscuridad son prácticamente aislantes pero al ser iluminados con luz en el rango visible o ultravioleta cercano se tornan conductores. Por ejemplo, con iluminación de longitud de onda  $\lambda = 514 \text{ nm}$  y potencia de  $1 \text{ mW/cm}^2$ , la fotoconductividad aumenta en  $10^7$  [4.9].

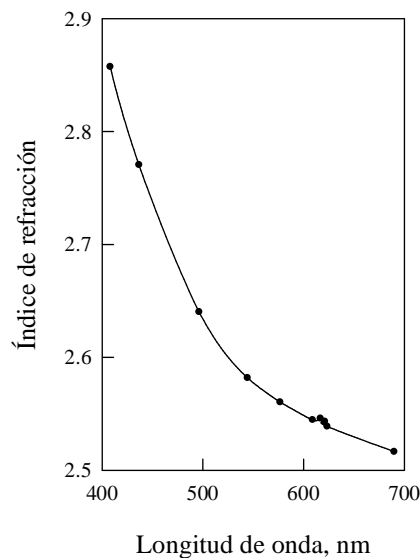


Figure 4.1: Variación espectral del índice de refracción para un cristal BSO

Las propiedades ópticas y dieléctricas de los silenitas son muy similares debido a su estructura cristalina común y la gran similitud química entre Si y Ge, por lo que es suficiente describir uno de ellos. El BSO pertenece al sistema cúbico, con grupo de simetría puntual 43m, y es por lo tanto isótropo. Presenta un elevado índice de refracción, como se observa en la Figura 4.1:  $n = 2,86$  para  $\lambda = 400$  nm y  $n = 2,51$  para  $\lambda = 700$  nm [4.10]. Una consecuencia natural del valor alto del índice de refracción es que el BSO posee reflectividades muy altas, que llegan a ser hasta del 20 % en el rango visible del espectro. La absorción en este rango depende fuertemente del dopaje de los cristales. La Figura 4.2 muestra la dependencia espectral de la absorción óptica para cristales BSO/BGO puros. Existe un fuerte crecimiento en la zona cercana a 3,25 eV, responsable de la fotoconductividad en el visible y de la coloración anaranjada de los cristales. La máxima absorción se presenta en la región del azul y es mínima en la región del rojo. Este comportamiento espectral es de gran importancia debido a que permite registrar imágenes con longitudes de onda en el rango de 400-500 nm y leerlas sin degradarlas en el rango de 600-700 nm.

Es la combinación del elevado índice de refracción con el valor adecuado de coeficiente electro-óptico lo que hace a éstos materiales atractivos para las aplicaciones.

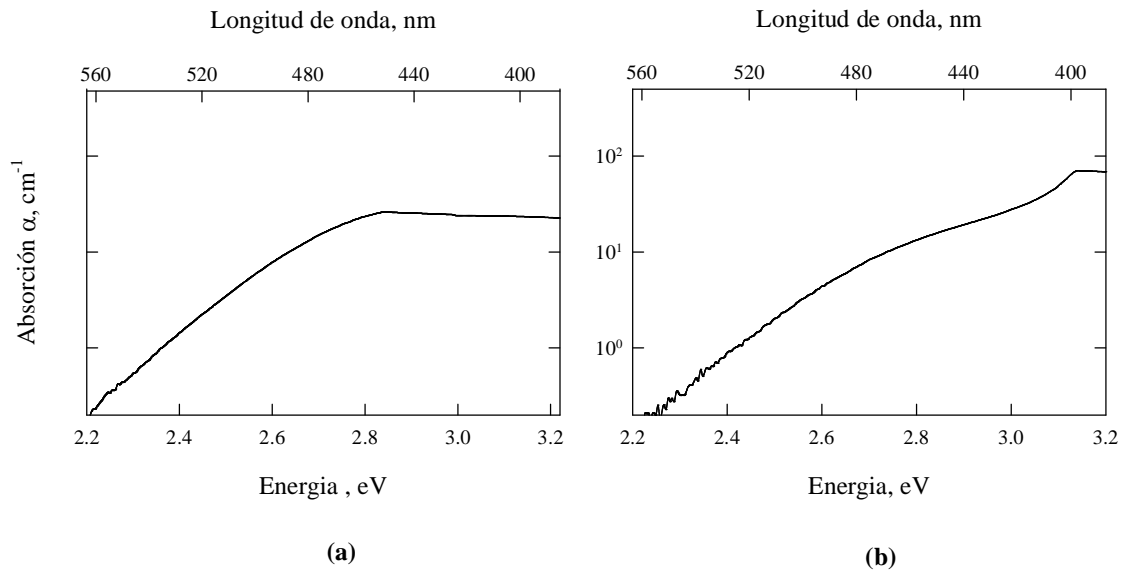


Figura 4.2: Espectros de absorción de los cristales: (a) BSO y (b) BGO

### 4.2.3 El modelo de transporte de bandas

Los materiales fotorrefractivos exhiben propiedades fotoconductoras. A partir del modelo de transporte de bandas, cuando un material fotorrefractivo es expuesto a la luz se generan portadores de cargas libres (electrones o huecos) por excitación desde los niveles de energía de las impurezas a la banda de conducción. La velocidad de ésta fotoionización es proporcional a la intensidad óptica y a la densidad de impurezas donoras no ionizadas. Dado que la intensidad de luz no es uniforme, la densidad de portadores excitados tampoco lo es. Luego, estos portadores migran por difusión y por arrastre (deriva o “drift”) debido al campo local desde las posiciones de alta intensidad (alta concentración) donde fueron generados hacia las posiciones de baja intensidad (baja concentración), dejando atrás las cargas fijas de signo opuesto, asociadas con los iones impurezas. Los portadores libres pueden ser atrapados por impurezas ionizadas en otras ubicaciones, depositando allí su carga a medida que se recombinan. En el equilibrio, la velocidad de fotoionización y la velocidad de recombinación son iguales. El resultado es la creación de una distribución de carga espacial inhomogénea estacionaria que puede permanecer en el lugar por un período de tiempo después que la luz fue removida. Esta distribución de carga crea un patrón de campo eléctrico interno dependiente de la posición, que puede ser calculado asumiendo que, en estado estacionario, las densidades de corriente eléctrica de deriva y de difusión son de igual magnitud y sentido opuesto, tal que la densidad de corriente total se anula. El proceso es ilustrado en la Figura 4.3 para BSO.

Dada una distribución de intensidad luminosa, a partir de las ecuaciones para la velocidad de generación de portadores de carga que provee el modelo de transporte de bandas, junto con las ecuaciones de Maxwell, solo resta calcular el campo de carga espacial como función de la posición y el tiempo. Debido a que el modelo de transporte de bandas es el marco teórico que se utiliza para explicar la formación de redes, la distribución de intensidad luminosa es una función periódica del espacio. Por lo tanto, el campo de carga espacial  $E^{ce}$  generado en el material también es periódico y su dirección es la de la periodicidad, es decir,  $E^{ce}$  es paralelo al vector de onda  $K$  de la distribución de intensidad. El problema tiene soluciones exactas solo cuando la modulación en intensidad es suficientemente pequeña.

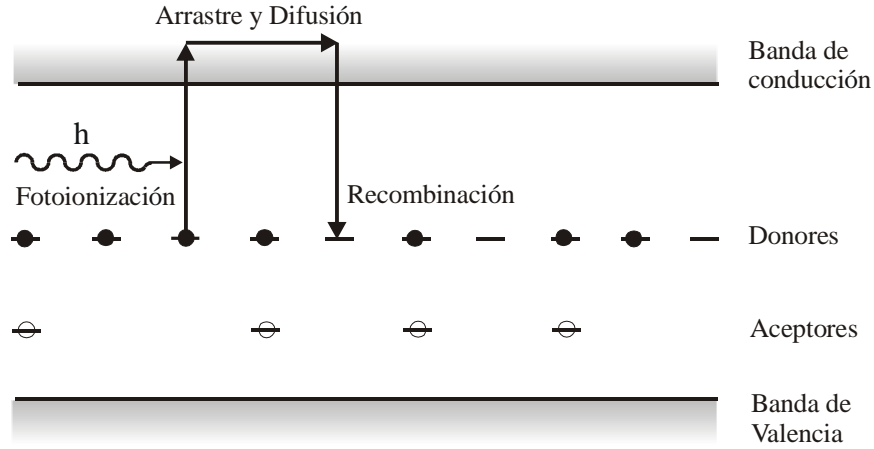


Figura 4.3: Diagrama de niveles de energía ilustrando el modelo de transporte de bandas.

#### 4.2.4 El campo de carga espacial

La formación del campo de carga espacial en un cristal silenita se analiza en dos categorías distintas: sin y con aplicación de un campo eléctrico externo.

En ausencia de un campo eléctrico aplicado los fotoelectrones son transportados por difusión, como resultado del gradiente de la densidad electrónica. Las cargas son separadas hasta lograr el estado estacionario, en el cual la densidad local de carga no varía con el tiempo y la corriente neta es nula. El campo de carga espacial se expresa en términos del llamado campo de difusión  $E_d$ , el cual es independiente de la densidad de dopantes, y viene dado por

$$E^{ce} = iK \frac{k_B T}{q} = iE_d \quad (4.1)$$

donde  $K = 2\pi/\Lambda$  es la magnitud del vector de onda de la distribución de intensidad de luz incidente,  $\Lambda$  es su período espacial,  $k_B T$  es el producto de la constante de Boltzmann y la temperatura y  $q$  es la carga del electrón.

Por otro lado, se considera el máximo campo eléctrico alcanzable para una dada densidad de carga de impurezas donoras ionizadas  $N_D^i$ . En este caso una vez alcanzada la separación de cargas, el campo de carga espacial se expresa en términos del llamado campo de saturación  $E_q$ , el cual involucra parámetros del material

$$E^{ce} = i \frac{qN_D^i}{K \langle \varepsilon \rangle} = iE_q \quad (4.2)$$

siendo  $\langle \varepsilon \rangle$  la constante dieléctrica efectiva del material.

Sumando las dos contribuciones, la amplitud del campo de carga espacial queda

$$E^{ce}_1 = \frac{iE_d}{1 + \frac{E_d}{E_q}} \frac{I_1}{I_0} \quad (4.3)$$

donde  $I_0$  e  $I_1$  son el término “bias” y la amplitud de modulación, ambos de la distribución de intensidad de luz que incide sobre el cristal, respectivamente. La ecuación (4.3) muestra dos aspectos relevantes a tener en cuenta. Primero, la amplitud del campo de carga espacial es proporcional a la amplitud de modulación normalizada de la distribución de intensidad de luz incidente. Segundo, es necesario examinar la dependencia de  $E^{ce}_1$  con el período de la distribución de intensidad,  $\Lambda$ , evaluando  $K = 2\pi/\Lambda$  en los campos  $E_d$  y  $E_q$ . Según (4.3),  $E^{ce}_1$  es siempre menor que el menor de  $E_d$  y  $E_q$ . Como muestra la Figura 4.4, en términos de  $\Lambda$ ,  $E_q$  es una línea recta y  $E_d$  es una hipérbola. Por lo tanto, para pequeños valores de  $\Lambda$ , el campo de carga espacial aumenta linealmente con  $\Lambda$ , alcanza un máximo en  $\Lambda = \Lambda_D$  para  $E_d = E_q$ , y decae como  $1/\Lambda$  para  $\Lambda \gg \Lambda_D$ .

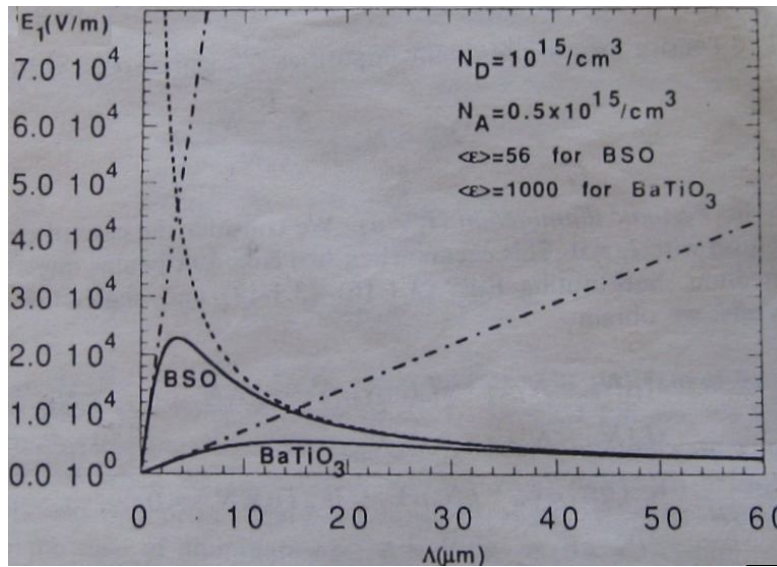


Figura 4.4: Campo de carga espacial  $E^{ce}_1$  vs. período de la red  $\Lambda$  para BaTiO<sub>3</sub> y BSO.

En el caso en que hay un campo eléctrico aplicado  $E_0$ , el campo de carga espacial resulta

$$E^{ce}_1 = \frac{iE_d - E_0}{1 + \frac{E_d}{E_q} + i \frac{E_0}{E_q}} \frac{I_1}{I_0} \quad (4.4)$$

donde se asume que  $E_0$  es paralelo a  $\mathbf{K}$ . Para apreciar mejor el efecto del campo aplicado, la ecuación (4.4) puede ser escrita

$$E^{ce}_1 = \frac{iE_d}{1 + \frac{E_d}{E_q}} \left[ \frac{1 + i \left( \frac{E_0}{E_d} \right)}{1 + i \left( \frac{E_0}{E_d + E_q} \right)} \right] \frac{I_1}{I_0} \quad (4.5)$$

El primer factor en (4.5) es el campo de carga espacial en ausencia de campo aplicado. El factor entre corchetes representa un factor de escala complejo; el hecho de que sea complejo implica que el campo aplicado modifica tanto la magnitud del campo de carga espacial como su fase espacial. Examinando este factor de escala notamos que el efecto del campo aplicado es insignificante cuando  $E_q \ll E_d$ , lo cual ocurre, según (4.1) y 4.2), para períodos del campo de carga espacial suficientemente pequeños. Esto se observa en la Figura 4.5, donde se representa la magnitud del factor de escala como función del campo aplicado  $E_0$  para diferentes valores de  $K$ . En general, el campo aplicado externamente tiene un efecto considerable sobre el campo de carga espacial cuando  $E_q \gg E_d$  y  $E_0 \geq E_d$ , es decir, para valores de  $\Lambda$  grandes.

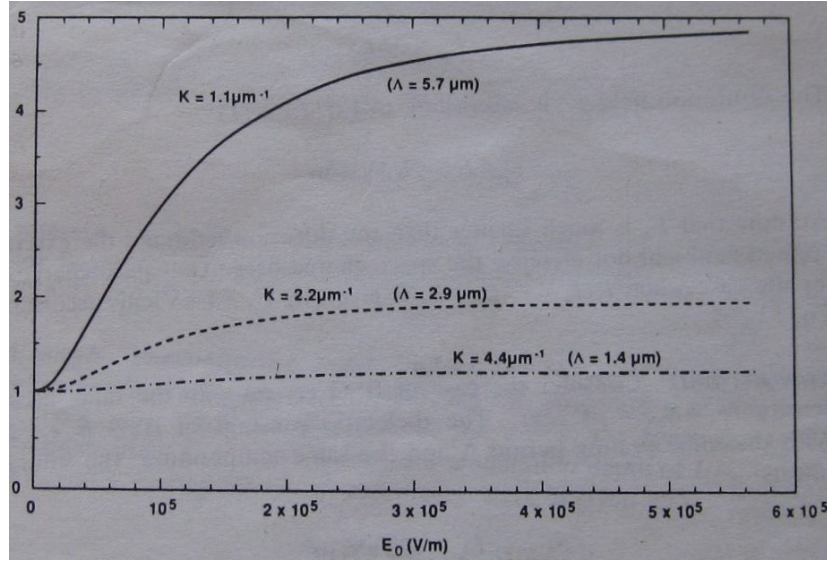


Figura 4.5: Factor de escala debido al campo aplicado  $E_0$  en la Ec.(4.5) vs.  $E_0$  para diferentes valores del período de la red  $\Lambda$ .

Para poner ésta idea en cantidades numéricas, un período  $\Lambda = 5 \mu\text{m}$ , en un cristal de  $\text{BaTiO}_3$ , con  $N_D^i = 0,5 \times 10^{15} / \text{cm}^3$  y  $\langle \varepsilon \rangle = 1000\varepsilon_0$ , a una temperatura de  $T = 300 \text{ K}$ , aporta  $E_d = 33 \text{ kV/m}$  y  $E_q = 7.2 \text{ kV/m}$ . En este caso,  $E_q \ll E_d$  y el campo externo no aumenta el campo de carga espacial. El mismo valor de  $\Lambda$  en un cristal de BSO con la misma densidad  $N_D^i$  y  $\langle \varepsilon \rangle = 56\varepsilon_0$ , a la misma temperatura, produce  $E_q = 126 \text{ kV/m}$ . Ahora,  $E_q \gg E_d$  y el campo aplicado puede aumentar el campo de carga espacial.

### 4.2.5 El efecto electro-óptico

Todos los materiales fotorrefractivos son electro-ópticos. El efecto electro-óptico se manifiesta como la dependencia del índice de refracción con el campo eléctrico aplicado. El campo eléctrico de carga espacial modula localmente el índice de refracción del material debido a este efecto. Este fenómeno asume una de las dos formas siguientes:

- El índice de refracción cambia en proporción al campo eléctrico aplicado, un fenómeno conocido como efecto electro-óptico lineal o efecto Pockels.
- El índice de refracción cambia en proporción al cuadrado del campo eléctrico aplicado, conocido como efecto electro-óptico cuadrático o efecto Kerr.



El efecto Pockels es responsable de los fenómenos que ocurren en los cristales fotorrefractivos, por lo cual será válido, en una primera aproximación, despreciar el efecto electro-óptico cuadrático.

El cambio en el índice de refracción de un medio electro-óptico al que se le aplica un campo eléctrico estacionario es pequeño en comparación con el índice de refracción del material sin perturbar. Sin embargo, la fase de una onda óptica propagándose a través del medio en esas condiciones puede ser modificada significativamente si la distancia de propagación es mucho más grande que la longitud de onda de la luz. Por ejemplo, si el índice de refracción aumenta en  $10^{-5}$  por la presencia del campo eléctrico, una onda óptica propagándose una distancia de  $10^5$  longitudes de onda sufrirá un cambio de fase adicional de  $2\pi$ .

Ahora bien, los materiales electro-ópticos de interés son anisotrópicos, esto es, sus propiedades ópticas macroscópicas dependen de la dirección. En un medio dieléctrico, anisotrópico y lineal, cada componente del desplazamiento eléctrico  $\mathbf{D}$  es una combinación lineal de las tres componentes del campo eléctrico,

$$D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j \quad (4.6)$$

con  $i, j = 1, 2, 3$  para las componentes  $x, y$  y  $z$ , respectivamente. Las propiedades dieléctricas del medio son entonces caracterizadas por un arreglo  $3 \times 3$  de nueve coeficientes,  $\{\epsilon_{ij}\}$ , que forman un tensor de segundo rango  $\epsilon$  llamado permitividad eléctrica. La ecuación del material (4.6) se escribe entonces  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ . Para la mayoría de los medios dieléctricos, el tensor permitividad eléctrica es simétrico. Esta simetría se cumple en materiales dieléctricos no magnéticos que no exhiben actividad óptica, y en ausencia de un campo magnético externo. Con ésta simetría el medio es caracterizado por solo seis coeficientes independientes en un sistema de coordenadas arbitrario.

La relación  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$  puede ser invertida y escrita en la forma  $\mathbf{E} = \epsilon^{-1} \mathbf{D}$ , donde  $\epsilon^{-1}$  es la inversa del tensor  $\epsilon$ . Se define el tensor impermeabilidad eléctrica  $\eta = \epsilon_0 \epsilon^{-1}$  tal que  $\epsilon_0 \mathbf{E} = \eta \mathbf{D}$ . Debido a que  $\epsilon$  es simétrico,  $\eta$  también lo es.

Las propiedades ópticas de un medio anisotrópico son caracterizadas por una construcción geométrica, la representación cuádrica del tensor impermeabilidad eléctrica, llamada elipsoide de índices,

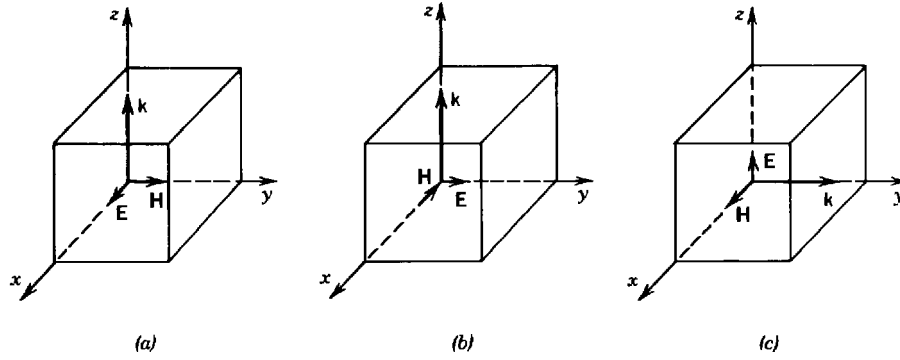
$$\sum_{i,j} \eta_{ij} x_i x_j = 1 \quad , \quad i,j = 1,2,3 \quad (4.7)$$

Los elementos del tensor impermeabilidad dependen de cómo el sistema de coordenadas es elegido relativo a la estructura del cristal. Siempre es posible encontrar un sistema coordenado para el cual los elementos de  $\boldsymbol{\eta}$  fuera de la diagonal se anulan, tal que  $\epsilon_0 E_1 = \eta_1 D_1$ ,  $\epsilon_0 E_2 = \eta_2 D_2$  y  $\epsilon_0 E_3 = \eta_3 D_3$ .  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{D}$  son paralelos a lo largo de éstas direcciones en particular. Los ejes de este sistema se llaman ejes principales del cristal. De acuerdo a la Ec. (4.7), si los ejes del elipsoide corresponden a los ejes principales del medio, sus dimensiones a lo largo de estos ejes son los índices de refracción principales  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$ ,

$$\frac{x_1^2}{n_1^2} + \frac{x_2^2}{n_2^2} + \frac{x_3^2}{n_3^2} = 1 \quad (4.8)$$

Aquellos cristales para los cuales  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$  son distintos se llaman biaxiales. Para cristales con cierta simetría, por ejemplo un eje de simetría de orden tres, cuatro o seis, dos de los índices de refracción son iguales y el cristal se llama uniaxial, en cuyo caso el elipsoide de índices se reduce a un elipsoide de revolución. El eje  $z$  de un cristal uniaxial se llama eje óptico. En cristales con simetría aún mayor, por ejemplo, con celda unitaria cúbica, los tres índices son iguales y el medio es ópticamente isotrópico, en cuyo caso el elipsoide resulta en una esfera.

Si la luz es una onda plana propagándose a lo largo de un eje principal y polarizada a lo largo de otro eje principal, su velocidad de fase es  $c_0/n_1$ ,  $c_0/n_2$  o  $c_0/n_3$  cuando el vector de campo eléctrico apunta en las direcciones  $x$ ,  $y$  o  $z$ , respectivamente.


 Figura 4.6: Modos normales: a)  $k = n_1 k_0$ ; b)  $k = n_2 k_0$ ; c)  $k = n_3 k_0$ 

Es decir, para una dada direcci3n de propagaci3n a lo largo de un eje principal, quedan definidos dos estados de polarizaci3n ortogonales llamados modos normales, que se propagan con velocidades de fase distintas (Figura 4.6).

El elipsoide de 3ndices puede ser usado para determinar las polarizaciones e 3ndices de refracci3n  $n_a$  y  $n_b$  de los dos modos normales de una onda viajando a lo largo de una direcci3n arbitraria en un medio anisotr3pico. Como muestra la Figura 4.7 se traza un plano perpendicular a la direcci3n de propagaci3n que pase a trav3s del centro del elipsoide. Su intersecci3n con el elipsoide es la llamada elipse de 3ndices, cuyos semiejes mayor y menor son  $n_a$  y  $n_b$ , respectivamente. Las direcciones de los ejes mayor y menor de la elipse de 3ndices son las direcciones de los vectores  $\mathbf{D}_a$  y  $\mathbf{D}_b$  para los modos normales. Las direcciones de  $\mathbf{E}_a$  y  $\mathbf{E}_b$  pueden ser determinadas a partir de  $\mathbf{D}_a$  y  $\mathbf{D}_b$ . [4.2]

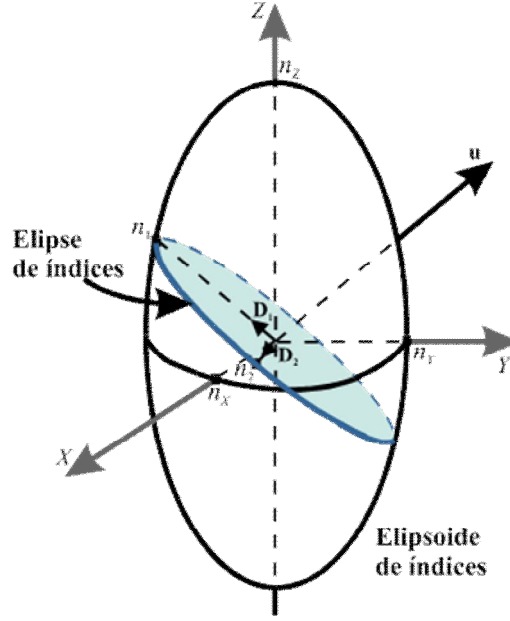


Figura 4.7: Determinación de los modos normales e índices de refracción a partir del elipsoide de índices

Cuando un campo eléctrico estacionario  $\mathbf{E}$  con componentes  $(E_1, E_2, E_3)$  es aplicado a un cristal, cada uno de los nueve elementos del tensor  $\eta$  resulta ser función de cada una de las componentes del campo,  $\eta_{ij} = \eta_{ij}(\mathbf{E})$ , y el elipsoide de índice se modifica. Por lo tanto, los elementos del tensor pueden ser expandidos en serie de Taylor alrededor de  $\mathbf{E} = 0$

$$\eta_{ij}(\mathbf{E}) = \eta_{ij} + \sum_k \tau_{ijk} E_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (4.9)$$

donde  $\eta_{ij} = \eta_{ij}(\mathbf{0})$  es una matriz diagonal con elementos  $1/n_1^2$ ,  $1/n_2^2$  y  $1/n_3^2$ ,  $\tau_{ijk} = \partial \eta_{ij} / \partial E_k$ , y las derivadas son evaluadas en  $\mathbf{E} = 0$ . Los términos de orden más alto que el primero en la expansión pueden ser despreciados para los materiales fotorrefractivos.

De ésta manera, el efecto electro-óptico se expresa en términos del cambio del tensor impermeabilidad. Los coeficientes  $\tau_{ijk}$  son conocidos como coeficientes electro-ópticos lineales (Pockels) y forman un tensor de tercer rango. A partir de la simetría de  $\eta$ ,  $\tau_{ijk} = \tau_{jik}$ , lo cual reduce su número de elementos independientes a  $6 \times 3$ . Se acostumbra usar la notación contraída  $\tau_{ijk} = \tau_{jik} = \tau_{lk}$ , con  $l=1, \dots, 6$  y  $k = 1, 2, 3$  (ó  $x, y, z$ ), o sea una matriz de  $6 \times 3$

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{1x} & \tau_{1y} & \tau_{1z} \\ \tau_{2x} & \tau_{2y} & \tau_{2z} \\ \tau_{3x} & \tau_{3y} & \tau_{3z} \\ \tau_{4x} & \tau_{4y} & \tau_{4z} \\ \tau_{5x} & \tau_{5y} & \tau_{5z} \\ \tau_{6x} & \tau_{6y} & \tau_{6z} \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

A su vez, la simetría del cristal suma más restricciones a los elementos de este tensor. Por ejemplo, para cristales con simetría de inversión (centrosimétricos) los coeficientes electro-ópticos lineales son todos nulos y éstos cristales, por lo tanto, no presentan efecto electro-óptico lineal. Dada la simetría que presentan los cristales como el BSO, el tensor electro-óptico lineal adopta la siguiente forma

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{41} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{41} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{41} \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

El valor que actualmente se da en la literatura es de  $\tau_{41} = 3,4 \times 10^{-12} \text{ m/V}$  [4.11].

Según (4.9), en presencia de un campo eléctrico, el tensor  $\boldsymbol{\eta}$  pasa a tener elementos fuera de la diagonal, por lo cual es necesario su diagonalización. De ésta manera, se determinan los ejes principales del elipsoide de índices modificado y se encuentran los correspondientes índices de refracción principales  $n_1(\mathbf{E})$ ,  $n_2(\mathbf{E})$  y  $n_3(\mathbf{E})$ . Luego, dada la dirección de propagación de luz, se encuentran los modos normales y sus índices de refracción asociados a partir de este elipsoide de índices.

En resumen, el efecto electro-óptico es producido por la presencia de un campo eléctrico y depende de la orientación respecto a los ejes cristalinos del medio.

### 4.2.6 La red de índice fotorrefractiva

Una vez que el campo de carga espacial ha sido creado en el material, el efecto Pockels se encarga de la formación de la red de índice. A partir de la ecuación (4.9) para el tensor impermeabilidad, se tiene

$$\eta_{ij}(\mathbf{E}) = \eta_{ij}(\mathbf{0}) + \sum_k \tau_{ijk} E_k \quad i, j, k = 1, 2, 3 \quad (4.12)$$

donde el primer término representa la matriz diagonal sin perturbar y el segundo término es una pequeña perturbación fuera de la diagonal

$$\Delta\eta_{ij} = \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_{ij} = \sum_k \tau_{ijk} E_k^{ce} \quad (4.13)$$

En (4.13),  $\tau_{ijk}$  son los elementos del tensor electro-óptico lineal y  $E_k^{ce}$  es la k-ésima componente del campo de carga espacial,  $\mathbf{E}^{ce}$ . Luego, se puede expresar la variación de impermeabilidad como variación de índice de refracción

$$\Delta\eta_{ij} = (d\eta/dn) \Delta n_{ij} = (-2/n^3) \Delta n_{ij} \quad (4.14)$$

Ahora se tiene

$$\Delta n_{ij} = \left(-\frac{1}{2}n^3\right) \sum_k \tau_{ijk} E_k^{ce} \quad (4.15)$$

donde el campo de carga espacial  $\mathbf{E}^{ce}$  puede ser escrito como

$$\mathbf{E}^{ce} = \text{Re}\{\mathbf{E}_1^{ce} e^{-i\mathbf{K}\mathbf{r}}\} \quad (4.16)$$

El módulo del vector  $\mathbf{E}_1^{ce}$  está dado por las ecuaciones (4.3) o (4.4) y una dependencia espacial, en este caso sinusoidal, se ha incluido, la cual replica un patrón de iluminación incidente. De acuerdo a las ecuaciones (4.15) y (4.16), una modulación en el índice de refracción en todo el volumen se forma cuando un cristal fotorrefractivo es iluminado por una distribución de intensidad de luz con periodicidad espacial.

En lo que hace al patrón de luz incidente, la mayor parte de la literatura relacionada con redes fotorrefractivas se refiere a redes grabadas mediante un registro holográfico. Sin embargo, a partir del desarrollo de los conversores ópticos incoherente-coherente fotorrefractivos, una imagen incoherente es enfocada en el volumen del material fotorrefractivo en superposición con los haces que forman la red coherente, creando una modulación espacial adicional sobre la distribución de carga almacenada en el cristal [4.12]. En ésta tesis, se usa un registro no holográfico con luz incoherente. El uso de una configuración no holográfica incoherente merece la consideración de algunos aspectos teóricos relacionados con la respuesta en frecuencias de un sistema formador de imagen incoherente [4.13].

### 4.3 Formación de imagen a partir de un sistema incoherente

Como es bien sabido, un sistema formador de imagen incoherente es lineal en intensidad, es decir, para iluminación incoherente, la intensidad de la imagen  $I$  que el sistema genera de un objeto es la convolución de la respuesta de impulso en intensidad,  $|h|^2$ , con la transmitancia en intensidad del objeto,  $T$ ,

$$I(x_2, y_2) = \int \int_{-\infty}^{\infty} T(x', y') |h(x_2 - x', y_2 - y')|^2 dx' dy' = T * |h|^2 \quad (4.17)$$

donde  $*$  representa la operación de convolución.

Aplicando la transformada de Fourier en ambos miembros de la Ec. (4.17) y usando el teorema de convolución, los espectros de la salida,  $\tilde{I}$ , y la entrada,  $\tilde{t}$ , del sistema están relacionados por

$$\tilde{I}(u, v) = H(u, v) \tilde{t}(u, v) \quad (4.18)$$

donde  $H(u, v)$ , conocida como la Función de Transferencia Óptica (FTO) del sistema, especifica el factor de peso complejo aplicado por el sistema formador de imagen

incoherente a la componente en frecuencia  $(u,v)$ , y describe de ésta manera el comportamiento en frecuencias de un sistema formador de imagen incoherente.

En un sistema limitado por difracción, la presencia de una fuente puntual que forma parte del objeto produce en la pupila de salida una onda esférica ideal que, tras dejar el sistema, converge en un punto situado sobre el plano imagen. Se puede probar que la FTO de un sistema incoherente limitado por difracción es la autocorrelación normalizada de la función transmitancia de la pupila de salida del sistema. Para una pupila cuadrada de lado  $D$  resulta

$$H(u,v) = \Lambda\left(\frac{u}{2u_0}\right) \Lambda\left(\frac{v}{2v_0}\right) \quad (4.19)$$

donde  $\Lambda$  es la función Heaviside lambda o función triángulo y  $2u_0 = 2v_0 = D/\lambda z_i$  es la frecuencia de corte del sistema (Figura 4.8).

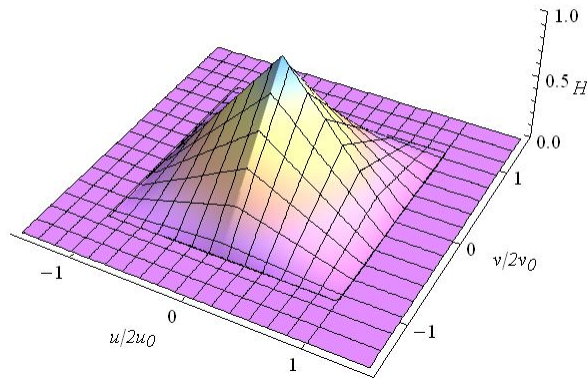


Figura 4.8: Función de Transferencia Óptica (FTO) de un sistema limitado por difracción con pupila de salida cuadrada

A diferencia de lo anterior, en un sistema que presenta aberraciones, se consideran los apartamientos del frente de onda que sale de la pupila de salida con respecto a la forma esférica ideal. Para ello se define una función pupila generalizada

$$P(x,y) = P_0(x,y) \exp[ikW(x,y)] \quad (4.20)$$



donde  $P(x, y)$  es la función pupila del sistema sin aberración y  $W(x, y)$ , conocida como función aberración, representa el error en la longitud de camino acumulado por el rayo desde el frente de onda esférico ideal al frente de onda real en el punto  $(x, y)$  sobre la pupila de salida. El error puede ser positivo o negativo, dependiendo de si el frente de onda real se encuentra adelantado o retrasado respecto del frente de onda esférico. Es la autocorrelación de la función pupila generalizada de la Ec. (4.20) la que determina la FTO para un sistema incoherente con aberraciones. Una propiedad general importante es que las aberraciones nunca aumentan el módulo de la FTO, y por lo tanto, nunca aumentan el contraste de alguna componente en frecuencia espacial de la imagen. De hecho, en general disminuye el contraste. Además, las aberraciones pueden causar que la FTO tenga valores negativos en ciertas bandas de frecuencias. Cuando la FTO es negativa, las componentes de la imagen de aquellas frecuencias sufren una inversión de contraste, es decir, los picos de intensidad resultan en intensidad nula, y viceversa.

Una de las aberraciones más simples de tratar matemáticamente y que será de utilidad tener en cuenta para preparar el camino hacia la elaboración del modelo de cálculo de la red de volumen incoherente, es el desenfoque. Igual que antes, la suposición de una pupila cuadrada de lado  $D$ , en lugar de circular, mantiene la matemática simple. En este caso, la función aberración toma la forma

$$W(x, y) = W_m \frac{x^2 + y^2}{D^2} \quad (4.21)$$

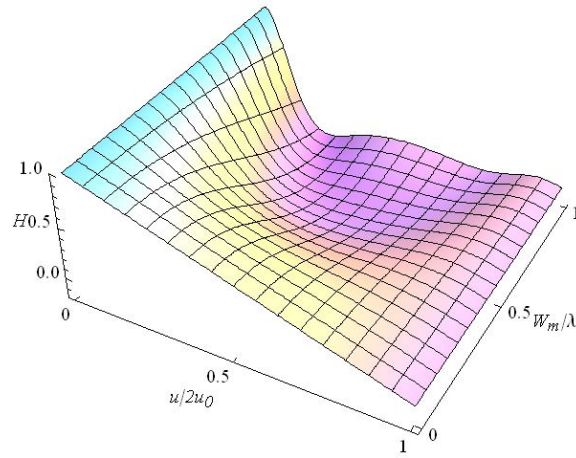
donde  $W_m$  es el error máximo en la longitud de camino en el borde de la abertura. Usando las Ecs. (4.20) y (4.21), la FTO para un sistema incoherente con aberración por desenfoque resulta

$$H(u, v) = \Lambda\left(\frac{u}{2u_0}\right) \Lambda\left(\frac{v}{2v_0}\right) \times \text{senc}\left[\frac{8W_m}{\lambda}\left(\frac{u}{2u_0}\right)\left(1 - \frac{|u|}{2u_0}\right)\right] \text{senc}\left[\frac{8W_m}{\lambda}\left(\frac{v}{2v_0}\right)\left(1 - \frac{|v|}{2v_0}\right)\right] \quad (4.22)$$

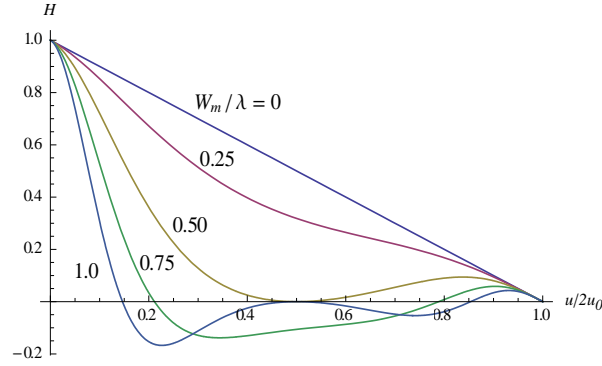
El gráfico de la FTO de la Ec. (4.22) se muestra en la Figura 4.9 para varios valores de  $W_m/\lambda$ . La FTO del sistema limitado por difracción se obtiene para  $W_m = 0$ . Para valores de  $W_m$  mayores que  $\lambda/2$  aparecen inversiones de signo, que resultan en inversiones de contraste en la imagen, como es evidente en el objeto conocido como Estrella de Siemens. La frecuencia espacial local de este objeto aumenta a medida que disminuye el radio. Por lo tanto, el contraste local de las franjas es una indicación del valor del módulo de la FTO para las diferentes frecuencias. A su vez, la posición de las franjas está determinada por la fase asociada con la FTO para cada frecuencia. Cuando el sistema está fuera de foco se observan una atenuación gradual del contraste y un número de inversiones de contraste a medida que aumenta la frecuencia espacial.

Cuando el desenfoque es muy severo, esto es, para  $W_m \gg \lambda$ , la FTO cae a cero para valores relativamente pequeños de  $u/2u_0$  y  $v/2v_0$ , con lo cual  $1 - |u|/2u_0 \approx 1$  y  $1 - |v|/2v_0 \approx 1$  y la Ec. (4.22) queda

$$H(u, v) = \text{senc} \left[ \frac{8W_m}{\lambda} \left( \frac{u}{2u_0} \right) \right] \text{senc} \left[ \frac{8W_m}{\lambda} \left( \frac{v}{2v_0} \right) \right] \quad (4.23)$$



a)



b)

Figura 4.9: Función de Transferencia Óptica (FTO) para un sistema desenfocado con pupila de salida cuadrada.

Por último, aplicando la transformada de Fourier inversa a la Ec. (4.18) se obtiene la imagen del objeto con el desenfoco adecuado.

Sobre la base de la teoría de formación de imagen a partir de un sistema incoherente junto con la teoría de formación de redes en medios fotorrefractivos, ambas delineadas en este capítulo, se desarrolla un modelo teórico que permite calcular y simular una red de volumen fotorrefractiva generada por luz incoherente. A continuación se describe el arreglo experimental usado para formar la red fotorrefractiva de volumen. Las especificaciones técnicas que se muestran en el arreglo completan la información necesaria para el cálculo de la red.

## 4.4 Dispositivo experimental para el registro de una red de volumen fotorrefractiva generada con luz incoherente

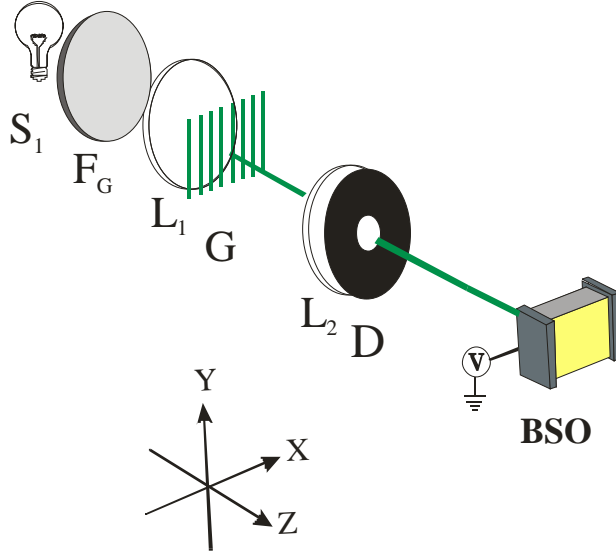


Figura 4.10: Arreglo experimental de registro:  $S_1$ , fuente de luz blanca;  $F_G$ , filtro interferencial centrado en 530 nm;  $G$ , red de Ronchi;  $L_1$ , lente condensadora;  $L_2$ , lente formadora de imagen;  $D$ , diafragma;  $BS$ , divisor de haz

La Figura 4.10 muestra el proceso de registro de la red fotorrefractiva. La imagen de una red de Ronchi de baja frecuencia,  $G$ , iluminada incoherentemente es proyectada dentro de un cristal BSO. Un filtro interferencial,  $F_G$ , centrado en la longitud de onda  $\lambda_r = 534$  nm ( $\Delta\lambda_r = \pm 7$  nm), es usado en la etapa de registro, debido a la alta sensibilidad del cristal en la región azul-verde del espectro visible. La lente  $L_2$ , de distancia focal  $f = 50$  mm, forma una imagen de la red en el cristal BSO con magnificación unitaria. Las direcciones  $\langle \bar{1}10 \rangle$ ,  $\langle 001 \rangle$  y  $\langle 110 \rangle$  del cristal coinciden con los ejes XYZ, respectivamente. Las dimensiones transversales de los cristales utilizados en el experimento son  $L_X = 10$  mm y  $L_Y = 10$  mm, mientras que  $L_Z$  varía entre 2 y 6 mm. Un diafragma  $D$  es colocado detrás de la lente formadora de imagen  $L_2$  para variar el diámetro de la pupila de salida del sistema. De ésta manera, una distribución de intensidad luminosa es interceptada por el volumen del cristal.

Esta distribución de intensidad es mapeada en una perturbación de índice de refracción vía el efecto fotorrefractivo, generando de este modo una red de fase de volumen con el mismo vector de onda que la red plana de entrada. Un campo eléctrico estático se aplica al cristal en una dirección paralela al vector de onda de la red (eje X en la Figura 4.10).

Este simple arreglo experimental de registro permite modificar las características de la red de volumen. En primer lugar, la profundidad de foco de la imagen proyectada es gobernada cambiando el diámetro del diafragma. De ésta manera, se modifica la región en la cual la red de índice se extiende dentro del cristal. Por lo tanto, el diámetro de la pupila de salida del sistema óptico usado para registrar la red es un punto clave de ésta etapa de registro. Segundo, la amplitud de la red de índice depende de la amplitud del campo de carga espacial, el cual es controlado variando el campo eléctrico externo. Tercero, el efecto del espesor de la red de volumen es analizado usando cristales con diferentes espesores.

Los aspectos relacionados con la etapa de registro completan la información necesaria para el desarrollo del modelo teórico que permite simular las redes, como se muestra a continuación.

## 4.5 Modelo teórico propuesto para el cálculo de una red de volumen fotorrefractiva generada con luz incoherente.

Como fue puntualizado en la Sección 4.4, en la etapa de registro, la imagen de una red de Ronchi iluminada incoherentemente se forma dentro del cristal. La función transmitancia en amplitud de la red está dada por

$$t(x) = \frac{1}{2} + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi m/2)}{\pi m} \cos\left(2\pi m \frac{x}{d}\right) \quad (4.24)$$

donde  $d$  es el período de la red. La red se coloca a una distancia,  $z_G$ , delante de la lente convergente  $L_2$ , de distancia focal  $f$  (Figura 4.10). La imagen de la red se forma a la distancia  $z_i$  detrás de la lente. Como fue descrito en la sección anterior, se necesita conocer la distribución de intensidad de luz en el plano imagen y sus cercanías (planos de desenfoque). Para describir cada uno de estos planos, se define el parámetro  $z_a$ , que representa la distancia desde los mencionados planos al plano de la lente. La distribución de

intensidad luminosa en cada uno de estos planos se calcula considerando un error de enfoque en la FTO del sistema óptico de registro. Como se mencionó, el parámetro usado para representar la severidad del desenfoque es el error máximo en la longitud de camino en el borde de la abertura, dado por

$$W_m = \left( \frac{1}{z_a} + \frac{1}{z_G} - \frac{1}{f} \right) \frac{D^2}{8} \quad (4.25)$$

donde se asume una abertura cuadrada de ancho  $D$  a la salida del sistema formador de imagen, debido a la simetría rectangular del objeto (Ec. (4.24)). Según la Ec. (4.25),  $W_m$  es nulo para  $z_a = z_i$ , lo cual corresponde a una imagen enfocada;  $z_a \neq z_i$  corresponde a la región delante y detrás del plano imagen, representando un error de enfoque que es no nulo. Es claro que la severidad del desenfoque para un plano en particular disminuye a medida que se hace más pequeña la dimensión de la pupila de salida del sistema formador de imagen. De hecho, una disminución en  $D$  aumenta la región en la cual la distribución luminosa para  $z_a \neq z_i$  se asemeja a la distribución luminosa para  $z_a = z_i$ .

Por lo tanto, evaluando la expresión para  $W_m$  de la Ec. (4.25) en la FTO de la Ec. (4.22) se obtiene el factor de peso complejo que el sistema incoherente aplica a cada frecuencia componente del objeto, para formar la imagen, ya sea que ésta esté enfocada ( $z_a = z_i$ ) como desenfocada ( $z_a \neq z_i$ )

$$H(u) = \Lambda \left( \frac{u}{2u_0} \right) \text{senc} \left[ \frac{8W_m}{\lambda_r} \left( \frac{u}{2u_0} \right) \left( 1 - \frac{|u|}{2u_0} \right) \right] \quad (4.26)$$

donde  $2u_0 = D/\lambda_r z_a$  es la frecuencia de corte y se considera el caso unidimensional correspondiente a una red 1D. Luego, usando la Ec. (4.18) y aplicando la transformada de Fourier inversa se obtiene la distribución de intensidad de luz que origina la red de volumen dentro del cristal

$$I(x_0, z_0; D) = F^{-1} \{ H(u) \cdot \tilde{T}(u) \} \quad (4.27)$$

donde  $\tilde{T}(u)$  es la transformada de Fourier de la función transmitancia en intensidad de la red. En la Ec. (4.27) la coordenada espacial longitudinal es tomada desde el plano imagen, esto es,  $z_0 = z_a - z_i$ . Es de notar que, en general,  $I$  es función de las tres coordenadas espaciales,  $I \equiv I(x_0, y_0, z_0; D)$ , lo cual corresponde a una imagen 3D; en la Ec. (4.27) se omite la coordenada  $y_0$  que está ausente en la transmitancia de la red de Ronchi.

La distribución de intensidad periódica dada por la Ec. (4.27) se replica como una modulación de birrefringencia en el volumen del cristal. Si se toman el campo de carga espacial,  $E^{ce}$ , y el vector de onda de la red de índice,  $K$ , ambos paralelos a la dirección  $\langle 110 \rangle$ , la Ec. (4.15) para la modulación de índice queda

$$\Delta n = \left( -\frac{1}{2} n^3 \right) \tau_{41} \text{Re} \{ E_1^{ce} \} I_N(x_0, z_0; D) \quad (4.28)$$

donde se ha evaluado el tensor electro-óptico lineal para el BSO (Ec. (4.11)); la dependencia espacial replica el patrón de iluminación incidente. En ésta última ecuación, el factor  $I_1/I_0$  que aparece en la Ec. (4.5) para  $E_1^{ce}$ , está incluido en la distribución de intensidad de luz incidente normalizada,  $I_N(x_0, z_0; D)$ .

En este trabajo se emplea una red con un período de 0,5 mm, lo suficientemente grande para que sea válida la condición  $E_q \gg E_d$ , en cuyo caso el proceso de difusión es despreciable y solo la deriva tiene lugar. En éstas condiciones el campo aplicado externamente aumenta el campo de carga espacial. De hecho, a partir de la Ec. (4.5), usando la condición antes mencionada resulta

$$\text{Re} \{ E_1^{ce} \} = -E_0 \left( \frac{E_q^2}{(E_d + E_q)^2 + E_0^2} \right) \approx -E_0 \frac{1}{1 + (E_0/E_q)^2}. \quad (4.29)$$

Además, para un cristal BSO se cumple que  $E_q \gg E_0$ , con lo cual

$$\text{Re} \{ E_1^{ce} \} \approx -E_0 \quad (4.30)$$

Por lo tanto, una red de índice de volumen de baja frecuencia registrada en un BSO tiene una amplitud de modulación  $\Delta n_0$  que es lineal con el campo externo aplicado

$$\Delta n_0 = \frac{1}{2} n^3 \tau_{41} E_0, \quad (4.31)$$

y toma valores del orden de  $10^{-4}$ - $10^{-5}$ . Esta relación lineal será usufructuada en el próximo capítulo, donde se estudiará la formación de autoimágenes a partir de esta red de volumen.

Luego, la modulación de índice queda expresada por

$$\Delta n(x_0, z_0; E_0, D, L_Z) = \Delta n_0(E_0) I_N(x_0, z_0; D) \text{rect}(z_0/L_Z), \quad (4.32)$$

donde la función rectángulo es incluida para limitar el espesor de la red al espesor del cristal,  $L_Z$ .

Por último, la red de índice se describe por la función

$$n(x_0, z_0; E_0, D, L_Z) = n_0 + \Delta n(x_0, z_0; E_0, D, L_Z), \quad (4.33)$$

que representa una red de fase pura, dada la baja absorción que presenta el BSO.

A partir de la Ec. (4.33) es fácil reconocer, como fue observado experimentalmente, que la red de volumen fotorrefractiva es caracterizada por los parámetros mencionados en la Sección 4.4: el diámetro de la pupila de salida del sistema óptico de registro, el campo eléctrico externo y el espesor del cristal. El modo en que la modulación de la red de índice varía en términos de éstos tres parámetros será analizado en la sección siguiente.

De ésta manera queda delineado un modelo que permite describir las redes fotorrefractivas generadas con luz incoherente, a la vez que permite calcular estas redes en términos de parámetros bien definidos [4.14].



## 4.6 Simulación de una red de volumen fotorrefractiva generada con luz incoherente

En esta sección se muestran los resultados obtenidos usando el modelo teórico para simular las redes de volumen que se obtienen en las condiciones físicas del arreglo experimental de la Figura 4.10.

A partir de la Ec. (4.33) se puede ver el rol que cada parámetro desempeña en el cálculo de la red de volumen, es decir, qué aspecto de la red de volumen se ve modificado variando cada uno de éstos tres parámetros. Se observa que el diámetro de la pupila de salida,  $D$ , interviene de manera directa en el cálculo de la distribución de intensidad, siendo la red una réplica en fase de ésta distribución.

Por otro lado, el campo externo  $E_0$  aplicado al cristal determina la amplitud de la modulación de la red, ambos relacionados linealmente en las condiciones experimentales en las que se trabaja en ésta tesis (baja frecuencia de la red en un cristal BSO).

A su vez, el espesor del cristal  $L_z$  impone un límite al soporte material que origina la red de volumen.

Las redes de índice originadas en el BSO empleando iluminación incoherente son calculadas usando la Ec (4.33) en diferentes situaciones físicas [4.14]. Los tres parámetros propuestos para caracterizar la red son variados independientemente. En todos los casos, los valores usados para las constantes correspondientes al BSO son  $\tau_{41} = 3,4 \times 10^{-12}$  m/V y  $n = 2,54$  correspondiente a la longitud de onda de registro  $\lambda_r$ .

Si bien el modelo supone una pupila de salida cuadrada, el arreglo experimental utiliza una pupila circular. Con el objeto de evitar sobrevalorar el máximo error en la longitud de camino en el borde de la abertura ( $W_m$ ), se reemplaza  $D$  por  $D/\sqrt{2}$  en la Ec. (4.25), asumiendo una pupila cuadrada inscrita en la pupila circular de diámetro  $D$  del experimento.

Los cálculos y gráficos de las redes fueron realizados en Wolfram Mathematica 8, con una resolución de 10 puntos por milímetro. La Ec. (4.18) toma la forma siguiente

$$\begin{aligned} \tilde{I}(u) = H(u) \tilde{t}(u) = \Lambda\left(\frac{u}{2u_0}\right) \text{senc}\left[\frac{8W_m}{\lambda_r}\left(\frac{u}{2u_0}\right)\left(1 - \frac{|u|}{2u_0}\right)\right] \times \\ \times \left(\frac{1}{2}\delta(u) + 2 \sum_{m \text{ positivo}} \frac{\text{sen}(m\pi/2)}{m\pi} \delta(u - mu_0)\right) \end{aligned} \quad (4.34)$$

con  $u_0 = 2$  líneas/mm. Aplicando la transformada de Fourier inversa a la Ec. (4.34) se obtiene la distribución de intensidad de luz que origina la red de volumen dentro del cristal

$$\begin{aligned} I(x_0, z_0; D) = F^{-1}\{H(u) \tilde{t}(u)\} = \\ \frac{1}{2} + 2 \sum_{m \text{ positivo}} \frac{\text{sen}(m\pi/2)}{m\pi} \Lambda(mu_0, z_0) \text{senc}(mu_0, z_0) \cos(2\pi mu_0 x_0) \end{aligned} \quad (4.35)$$

Luego, solo resta evaluar la Ec. (4.35) en la Ec. (4.32) para obtener la modulación de índice,  $\Delta n(x_0, z_0; E_0, D, L_Z)$ , y esta última en la Ec. (4.33) para obtener la red de índice,  $n(x_0, z_0; E_0, D, L_Z)$ .

#### 4.6.1 Generación de redes en términos del espesor del cristal.

En la Tabla 4.1 se describe la modulación de la red de índice correspondiente al espesor del cristal  $L_Z$  variando desde 2 mm a 6 mm. Es de notar que un valor de  $D = 3$  mm determina una baja severidad de desenfoque de la imagen que mapea la red de volumen; de hecho,  $W_m < \lambda_r/2$  para este valor de  $D$  y para el rango de valores de  $z_a$  que abarca el cristal. En consecuencia, la región en la cual la red se extiende es más grande que el espesor del cristal, aún para el valor más grande de  $L_Z = 6$  mm, y la red es efectivamente limitada por el cristal. Estas redes de volumen muestran una modulación de fase casi uniforme en la dirección de propagación del campo, similar a la usada por las redes de volumen de fase pura discutidas en la Sección 3.3.3 del Capítulo 3.

El valor usado para el campo externo es de 7 kV/cm.

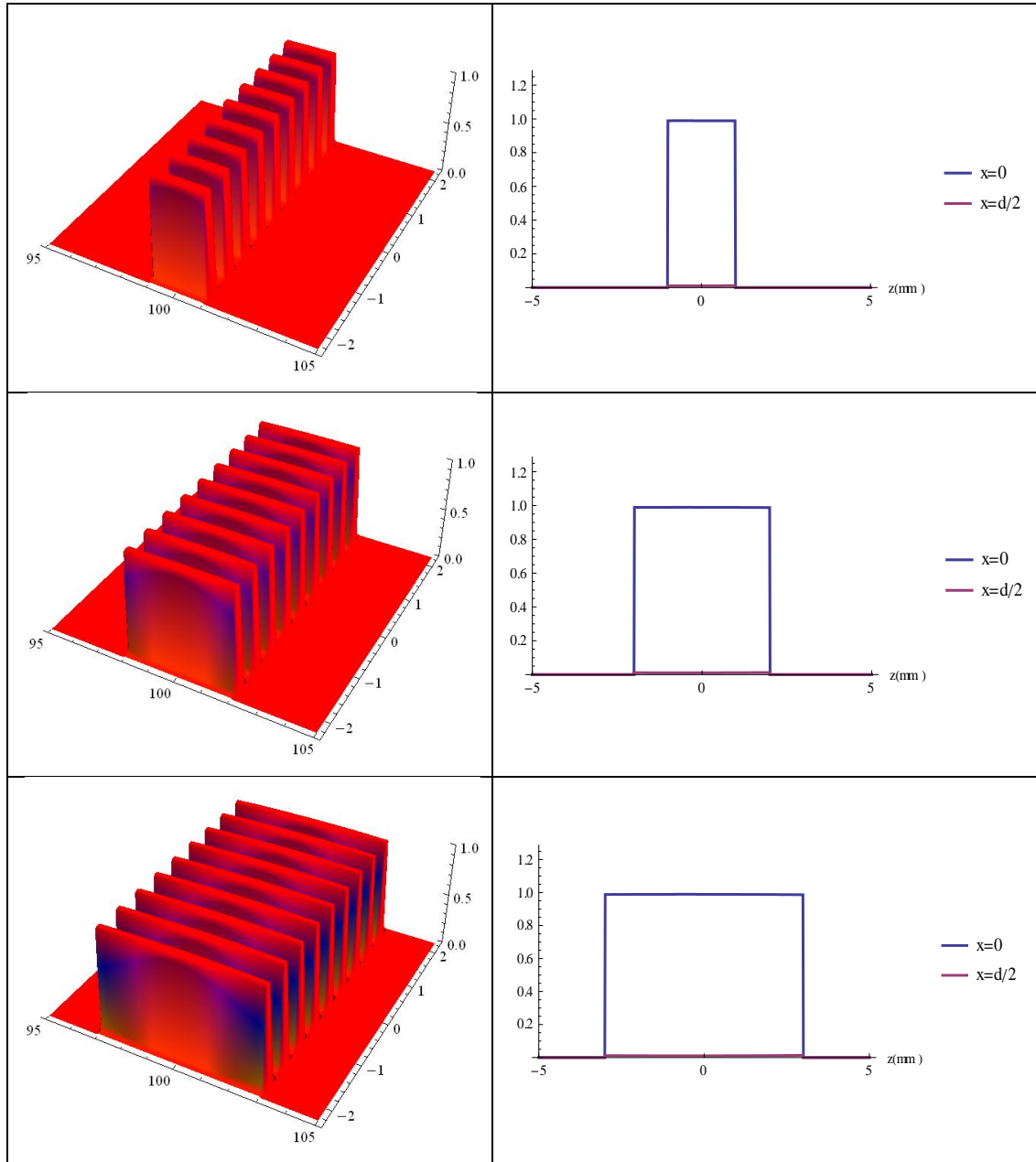


Tabla 4.1: Modulación de la red de índice simulada para diferentes espesores del cristal:  $L_Z = 2$  mm, 4 mm y 6 mm, con  $D = 3$  mm y  $E_0 = 7$  kV/cm.

### 4.6.2 Generación de redes en términos del campo externo.

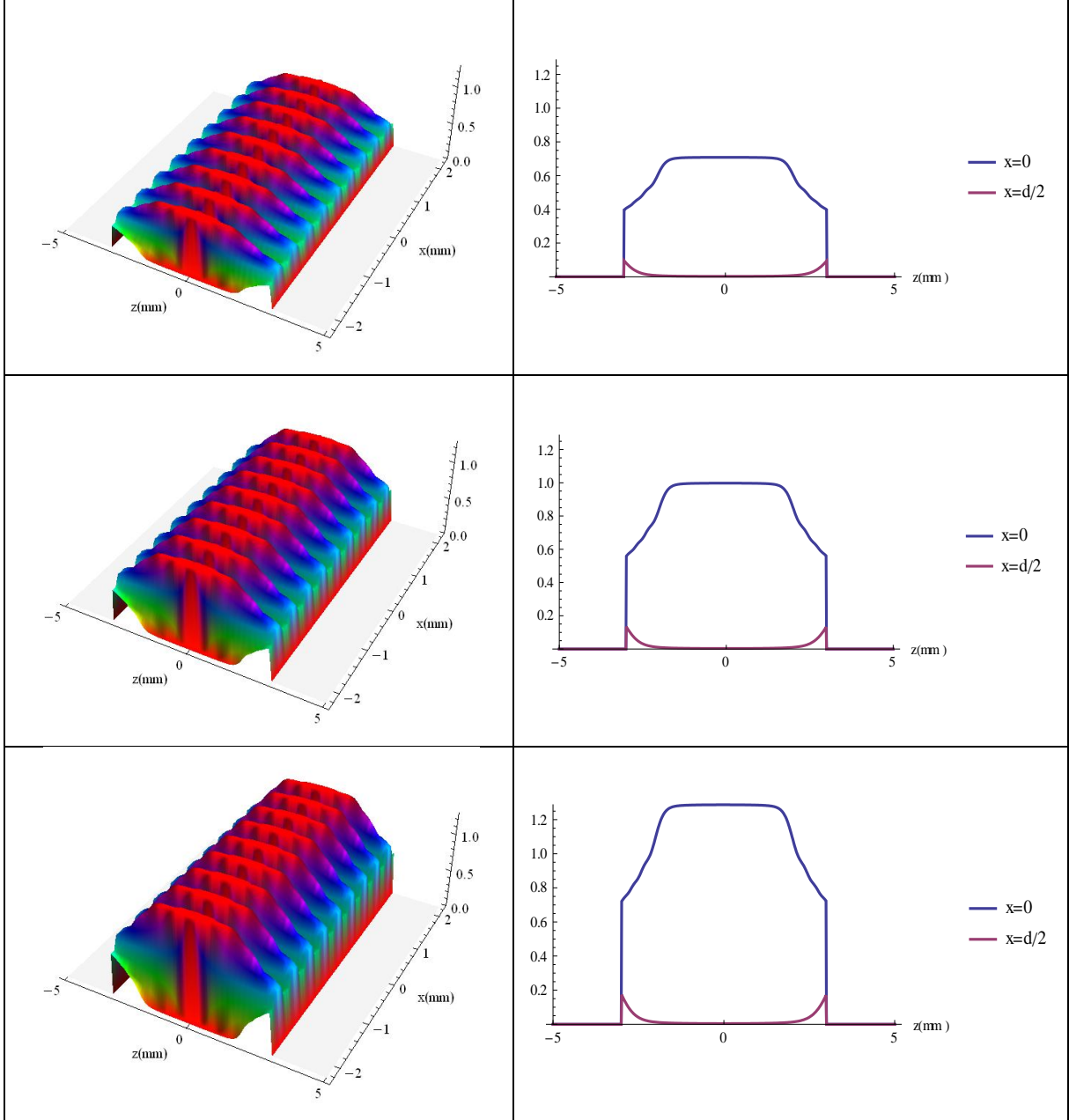


Tabla 4.2: Modulación de la red de índice simulada para diferentes campos externos:  $E_0 = 5$  kV/cm,  $7$  kV/cm y  $9$  kV/cm con  $D = 15$  mm y  $L_z = 6$  mm.

En la Tabla 4.2 se observa que un campo externo  $E_0$  creciente desde 5 kV/cm hasta 9 kV/cm conduce a un aumento en la amplitud de modulación de la red de índice,  $\Delta n_0$ . Como predice la teoría que explica la formación del campo de carga espacial, el campo eléctrico aplicado tiene un efecto relevante sobre la amplitud de modulación de la red para períodos de la red suficientemente grandes (Sección 4.3.3). Un valor de  $D = 15$  mm produce un desenfoque más severo que en el caso anterior, expresado a través de un valor más alto de  $W_m$ . Luego, como muestran los gráficos en código de color, la región en la que la red presenta máxima amplitud de modulación (rojo) resulta ser menor que el espesor del cristal,  $L_Z = 6$  mm.

### 4.6.3 Generación de redes en términos del diámetro de la pupila de salida

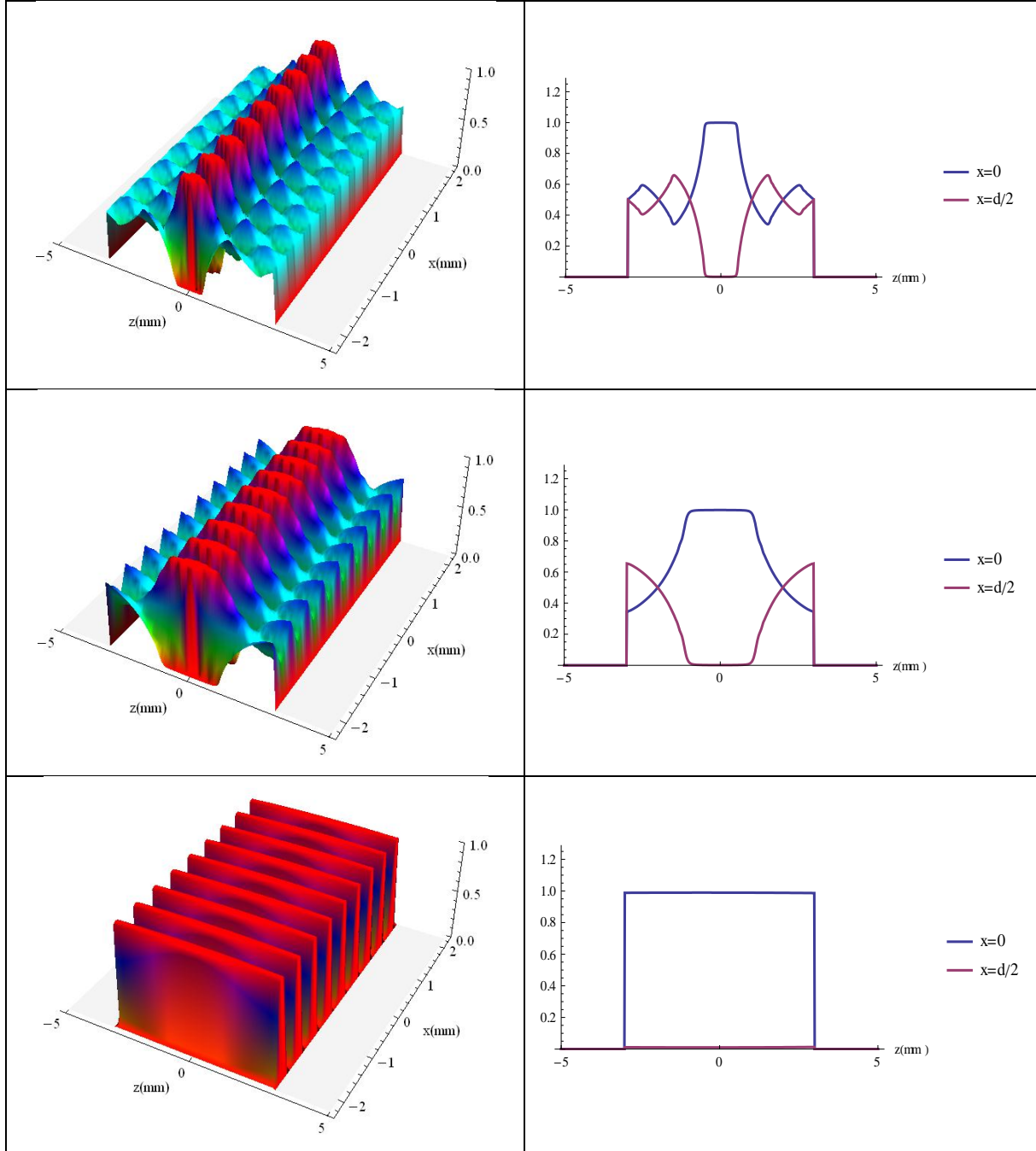


Tabla 4.3: Modulación de la red de índice simulada para diferentes diámetros de la pupila de salida:  $D = 50$  mm, 25 mm y 3 mm, con  $E_0 = 7$  kV/cm.y  $L_Z = 6$  mm.

En la Tabla 4.3 se muestra la modulación de la red de índice para un diámetro de pupila de salida decreciente de 50 mm, 25mm y 3 mm, con valores fijos de  $E_0 = 7$  kV/cm y  $L_Z = 6$ mm. Para  $D = 50$  mm el desenfoque de la imagen que mapea la red de volumen es crítico, más allá de un valor grande de  $L_Z = 6$  mm, dando como resultado una región con máxima amplitud de modulación (rojo) más estrecha. Es notoria la atenuación gradual en el contraste de la modulación de fase y la inversión en el contraste de ésta modulación, antes y después del plano  $z_0 = 0$ . Para valores decrecientes de  $D$ , la red con máxima amplitud se extiende cada vez más dentro del cristal.

En las tres tablas, cada red está acompañada a su derecha por una figura que contiene un par de curvas correspondientes al perfil longitudinal de la red. Una de las curvas está asociada al punto  $x=0$  sobre la cara anterior de la red, y la otra, a un punto desplazado lateralmente en medio período, esto es,  $x=d/2$ . Esta figura permite apreciar más claramente la variación en el contraste de la modulación, si es que existe. En las redes mapeadas por una imagen con un desenfoque despreciable, el contraste de la modulación se mantiene constante. Por otra parte, aquellas redes mapeadas por una imagen con un desenfoque severo, presentan ciertas inversiones o “nodos” donde el contraste es nulo, aumentando el número de nodos por unidad de longitud a medida que  $D$  aumenta.

La formación de la estructura que aparece en la modulación longitudinal de las redes de la Tabla 4.3 se explica utilizando las ideas desarrolladas en la Sección 4.3. En esa sección se consideró el efecto que produce el desenfoque sobre el comportamiento en frecuencias de un sistema incoherente. Para describir este efecto, la ecuación (4.26) se reescribe reemplazando  $2u_0$  por  $D/\lambda z$

$$H(u; z) = \Lambda\left(\frac{\lambda uz}{D}\right) \text{senc} \left[ \frac{8W_m}{\lambda} \left(\frac{\lambda uz}{D}\right) \left(1 - \frac{\lambda |u|z}{D}\right) \right] \quad (4.36)$$

donde el parámetro de desenfoque que aparece en el argumento del seno cardinal resulta

$$W_m = \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{z_G} - \frac{1}{f} \right) \frac{D^2}{8} \quad (4.37)$$

A partir de la Ec. (4.36), la FTO puede ser analizada en términos de  $u/2u_0$ , con  $u_0 = D/2\lambda z$ , como se hace habitualmente, o equivalentemente en términos del parámetro

normalizado  $z/2z_0$ , con  $z_0 = D/2\lambda u$ . En cualquiera de estos dos enfoques, el significado físico de la FTO permanece invariante, esto es, sigue siendo el factor de peso complejo aplicado por el sistema óptico incoherente a la componente en frecuencia  $u$  del espectro del objeto. Esto significa que el efecto que la FTO produce sobre la imagen será el mismo, ya sea que se considere un plano de observación fijo, variando la frecuencia o que se considere una frecuencia fija, variando el plano de observación. Vale la pena aclarar que de ninguna manera se plantea considerar la FTO como una función de la coordenada  $z$ , ya que esto entraría en contradicción con el formalismo matemático de la Óptica de Fourier, en el cual la FTO del sistema óptico se define en el espacio de frecuencias.

Para ahondar en la comprensión de la simetría aquí presentada, se propone considerar el efecto que el desenfoque produce sobre la imagen de dos objetos: el objeto conocido como Estrella de Siemens, de frecuencia espacial variable y la red de Ronchi, de frecuencia constante. La imagen desenfocada de la Estrella de Siemens, a una distancia fija de la misma, presenta una variación progresiva, y hasta una inversión, en el contraste en la dirección radial, dirección en la cual varía la frecuencia para este tipo de objetos. De forma análoga, la imagen desenfocada de la red de Ronchi, cuya frecuencia es fija, presenta una variación progresiva seguida de una inversión en el contraste, pero en este caso en la dirección longitudinal, dirección en la cual varía la posición del plano de observación.

La red de volumen almacenada en el cristal fotorrefractivo, tal como se presenta en esta tesis, se forma a partir de la réplica de una secuencia de imágenes de la red plana de Ronchi formadas a lo largo de la dirección longitudinal, en la región que ocupa el cristal. De esta manera, la red de volumen reproduce en conjunto las variaciones de contraste a lo largo de la coordenada longitudinal, tal como se observa en las redes simuladas de la Tabla 4.3.

#### **4.6.4 Comparación entre distribuciones de intensidad simuladas y experimentales**

Esta manera de analizar la variación de la modulación longitudinal de la red de índice en términos del diámetro de la pupila sugiere un experimento en el cual se mida la distribución de intensidad luminosa en la región que ocupa el cristal. Para ello se genera la



distribución de intensidad de la misma manera como se describió en la Figura 4.10, pero reemplazando el cristal por una cámara CCD Pulnix TM-6CN que se desplaza sobre un banco óptico usando un desplazador micrométrico, como se observa en la Figura 4.11.

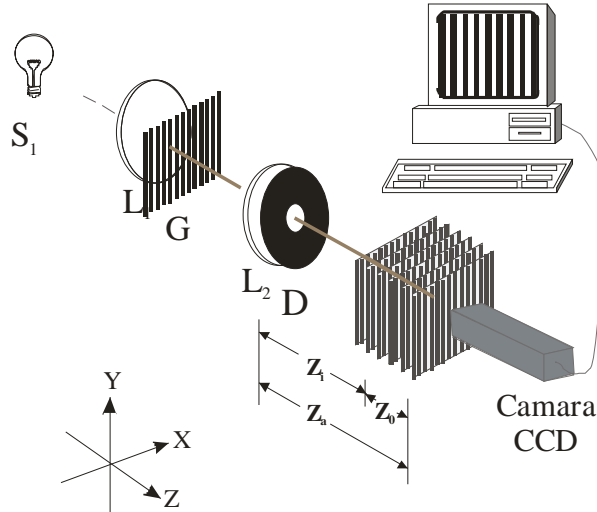


Figura 4.11: Arreglo experimental para la medición de la distribución de intensidad luminosa que origina la red de volumen fotorrefractiva.

La cámara se desplaza en pasos de 0,5 mm a lo largo de una distancia de 30 mm centrada en el plano imagen, adquiriendo una imagen de la red de Ronchi en cada una de estas posiciones. El arreglo de sensores de la cámara genera una matriz de valores de intensidad para cada imagen. De esta manera, la distribución de intensidad luminosa queda mapeada en una imagen 3D. De esta imagen 3D, se selecciona una porción central del cual se extrae un perfil de intensidad, el cual genera la tabla de valores que representa a la función  $I(x_0, z_0; D)$ .

La teoría que explica la formación de una red fotorrefractiva, presentada en la Sección 4.2.6, permite asociar las distribuciones de intensidad medidas en la región que ocupa el cristal BSO con las redes registradas en el cristal. En la Tabla 4.4, se comparan estas distribuciones de intensidad experimentales (izquierda) con las distribuciones de intensidad simuladas (derecha) variando el diámetro de la pupila de salida. Los gráficos en código de color describen cómo se extiende la región de máxima amplitud de modulación (rojo) a medida que  $D$  disminuye (desde arriba hacia abajo), tomando los valores 50 mm, 25 mm y 3 mm.

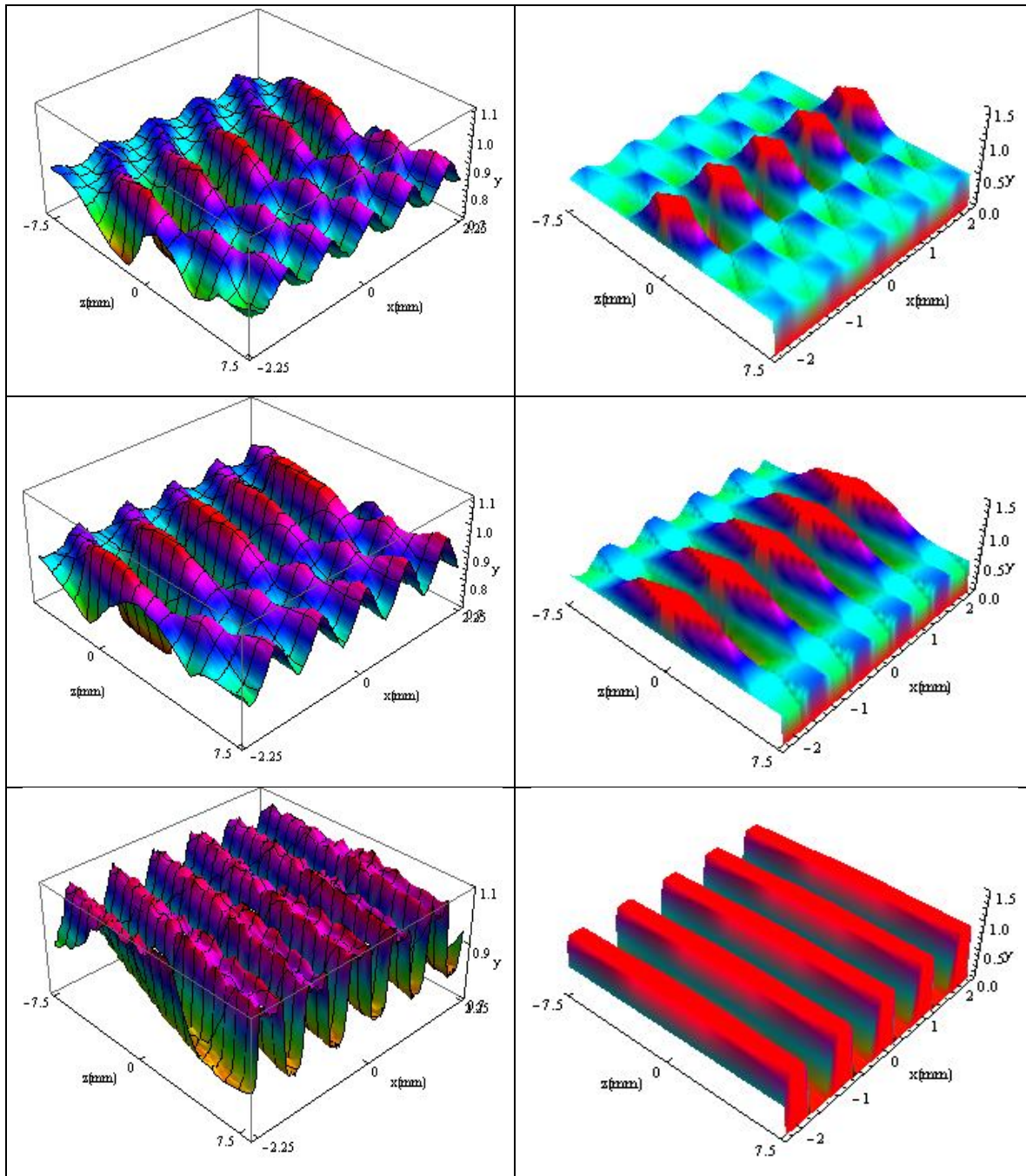


Tabla 4.4: Distribución de intensidad luminosa medida (izquierda) y simulada (derecha) que origina la red de volumen fotorrefractiva.  $D = 50$  mm, 25mm y 3 mm (desde arriba hacia abajo)

Se ha seleccionado una porción de 15 mm centrada en el plano imagen a lo largo de la dirección de propagación del campo luminoso. Se observa un buen acuerdo cualitativo entre distribuciones de intensidad experimentales y simuladas, particularmente en el ritmo de aumento de la región de enfoque a medida que disminuye  $D$ , así como las inversiones de contraste que ocurren cuando  $D$  aumenta.

## 4.7 Referencias

- [4.1] P. Yeh, *Introduction to photorefractive non linear Optics* (John Wiley & Sons Inc., New York, 1993), pp. 89-98.
- [4.2] B. E. A. Saleh y M. C. Teich, *Fundamentals of Photonics* (John Wiley & Sons, Inc., New Jersey, 2007), Cap.20.
- [4.3] A. Ashkin, G.D. Boyd, J.M. Dziedzic, R.G. Smith, A.A. Ballman, J.J. Levinstein and K. Nassau, *Optically-induced refractive index inhomogeneities in  $\text{LiNbO}_3$  and  $\text{LiTaO}_3$* , Appl. Phys. Lett., **9**,72, (1966).
- [4.4] F. S. Chen, J.T. La Macchia y D.B. Fraser, *Holographic storage in lithium niobate* Appl. Phys. Lett., **13**, 223 (1968).
- [4.5] F.S. Chen, *Optical induced change of refractive indices in  $\text{LiNbO}_3$  and  $\text{LiTaO}_3$* , J. Appl. Phys., **40**, 3389 (1969).
- [4.6] J. J. Amodei, *Electron diffusion effects during hologram recording in crystals* Appl. Phys. Lett., **18**, 22 (1971).
- [4.7] J. P. Huignard y J. P. Herrie, *Real time double-exposure interferometry with  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$  crystals in transverse electro-optics configuration*, Appl. Opt., **16**, 1807 (1977).
- [4.8] N. V. Kukhtarev, V. B. Markov, S.G. Odulov, M. S. Soskin and V. L. Vinetskii, *Holographic in electro-optic crystals. I. Steady state*, Ferroelectrics, **22**, 949 (1979).
- [4.9] A. E. Attard, *Theory of origins of the photorefractive and photoconductive effects in  $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$* , J. Appl. Phys., **69**, 44 (1991).

- [4.10] R. E. Aldrich, S. L. Hou and M. L. Harvill, *Electrical and Optical properties of  $Bi_{12}SiO_{20}$* , J. Appl. Phys., **42**, 493 (1971).
- [4.11] P. Pellat Finet, *Measurement of the electro-optics coefficient of BSO crystals*, Opt. Commun., **50**, 275 (1984).
- [4.12] J. W. Yu, D. Psaltis, A. Marrakchi, A. Tanguay and R. Johnson, *Photorefractive Materials and their Applications I*, Vol. 62, Eds. P. Günter and J. P. Huignard, Springer Verlag, Berlin Heidelberg (1988).
- [4.13] J.W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* (McGraw-Hill Inc., New York, 1996), pp.148-151.
- [4.14] G. Forte, A. Lencina, M. Tebaldi, N. Bolognini, *Talbot effect by a photorefractive volume phase grating*, *Applied Optics*, **51**, (2012) 479.

# CAPÍTULO 5

## El efecto Talbot a través de una red de volumen fotorrefractiva

---

### 5.1 Introducción

En éste capítulo se analizan, teórica y experimentalmente, las propiedades de la red de fase de volumen almacenada en el cristal fotorrefractivo como objeto formador de autoimágenes. El énfasis está puesto en el efecto de volumen de la red sobre el comportamiento de los patrones.

En el Capítulo 2 se presentó el modelo teórico basado en una formulación de integral de camino que tiene en cuenta la propagación del campo en un medio inhomogéneo. Luego, dicho modelo se usa para calcular la intensidad de los patrones de Talbot generados por una red binaria de volumen. La modulación de aquella red no varía en la dirección de propagación del campo, sólo lo hace en la dirección transversal de la periodicidad [5.1]. En éste capítulo, el modelo se emplea en una situación más realista: la propagación del campo a través de una red almacenada en un medio fotorrefractivo de volumen y la posterior propagación libre hasta la formación de los patrones de autoimágenes. Previo al análisis teórico, se describe el dispositivo experimental usado para la lectura de la red fotorrefractiva de volumen y se presentan los resultados experimentales. Luego, para el empleo del modelo, se evalúa la inhomogeneidad representada por la Ec. (4.33) en la Ec. (2.19) que expresa la amplitud del campo difractado. Además, se analiza el comportamiento de las autoimágenes en términos de los parámetros discutidos en el capítulo anterior, que gobiernan la generación de la red fotorrefractiva de volumen. Los resultados teóricos obtenidos se comparan con los patrones experimentales. Por último, se estudia la visibilidad de las autoimágenes en términos de los parámetros mencionados.

## 5.2 Dispositivo experimental para la lectura de una red de volumen fotorrefractiva. Resultados.

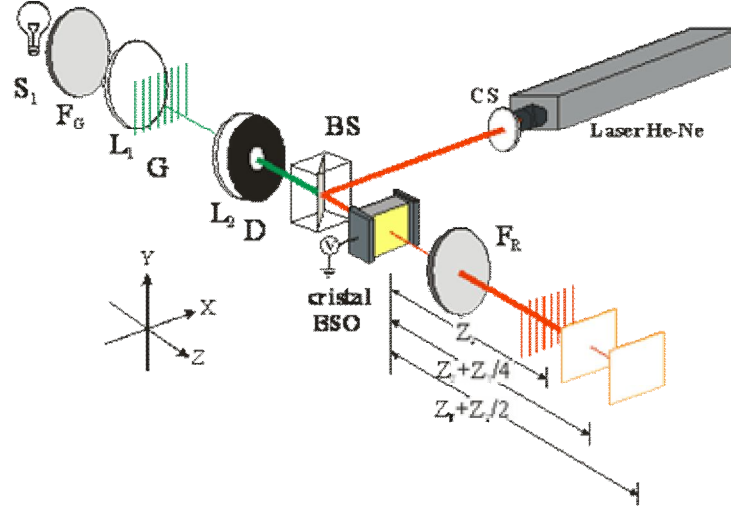


Figura 5.1: Arreglo experimental de lectura: CS, sistema colimador; BS, divisor de haz;  $F_R$ , filtro de interferencia rojo

Como muestra la Figura 5.1, la red de fase de volumen generada en el cristal BSO se ilumina coherentemente con un haz láser de He-Ne ( $\lambda_l = 632,8$  nm), expandido y colimado, linealmente polarizado en la dirección Y. Esta longitud de onda de lectura está fuera del rango de sensibilidad espectral del cristal, evitando así la degradación de la información almacenada. Un filtro rojo ( $\lambda = 632,8 \pm 3$  nm) es insertado para bloquear la luz de 534 nm y la imagen que esta pueda formar de la red. En ciertas configuraciones se utiliza un analizador a la salida del cristal, en cuyo caso la red se comporta como una red de amplitud. En nuestro caso, dado que no se usa analizador, la red almacenada como variaciones de índice de refracción, se comporta como una red de fase pura.

La red fotorrefractiva almacenada se utiliza para estudiar el fenómeno de autoimágenes a partir de una red de volumen, en este caso una red de fase pura. El plano de la primera autoimagen es enfocado con la ayuda de una cámara CCD Pulnix TM-6CN, cuya resolución máxima es de 18  $\mu\text{m}$ . La resolución en frecuencia espacial del sistema formador de imagen incoherente empleado, impone un mínimo sobre el período de la red de unas decenas de micrómetros. Teniendo en cuenta estas limitaciones, en éste trabajo se usa una red con un período de 0,5 mm.

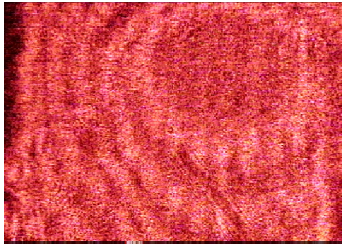
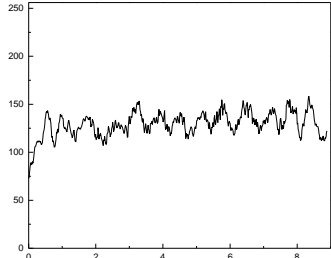
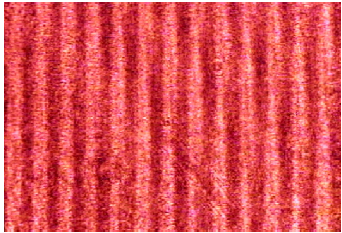
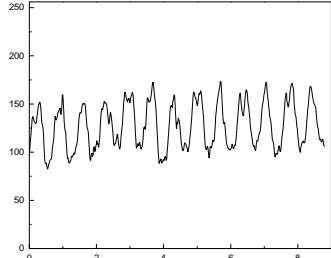
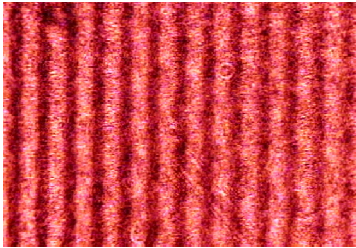
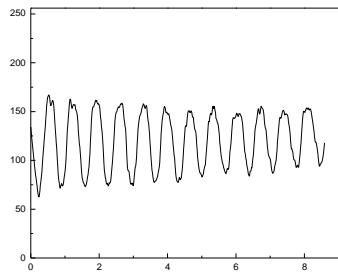
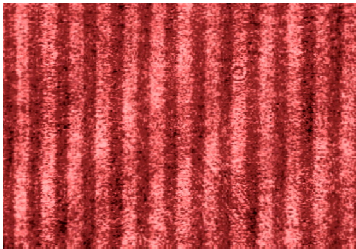
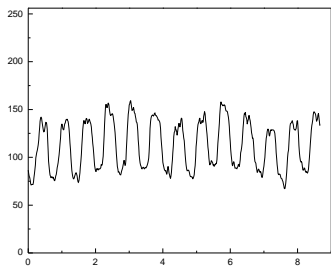
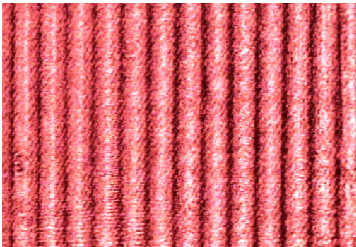
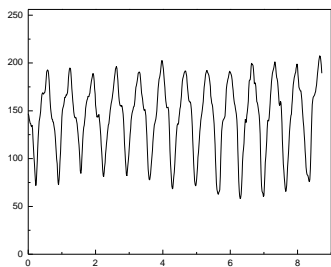
$L_z$	Primera autoimagen	Perfiles de intensidad
1 mm		
2 mm		
3 mm		
4 mm		
6 mm		

Tabla 5.1: Primera autoimagen generada por redes con espesor de cristal  $L_z$  variable, con  $D = 3$  mm y  $E_0 = 7$  kV/cm.



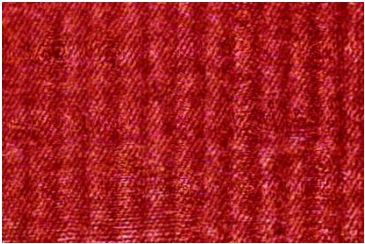
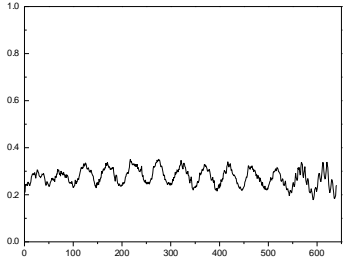

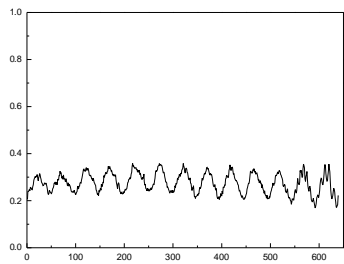

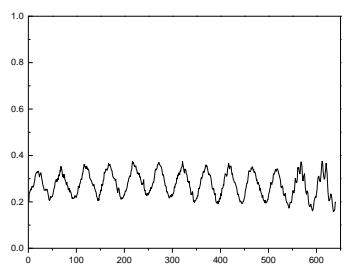

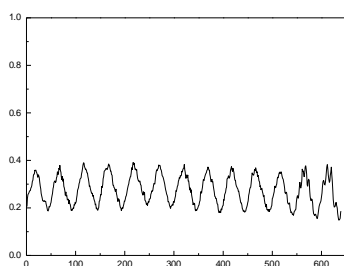

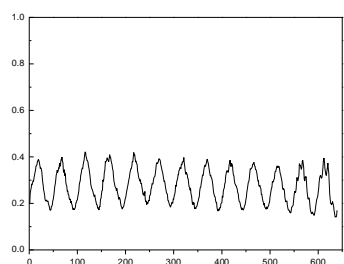
$E_0$	Primera autoimagen	Perfiles de intensidad
5 kV/cm		
6 kV/cm		
7 kV/cm		
8 kV/cm		
9 kV/cm		

 Tabla 5.2: Primera autoimagen generada por redes con campo externo  $E_0$  variable, con  $D = 3$  mm y

 $L_z = 3$  mm.



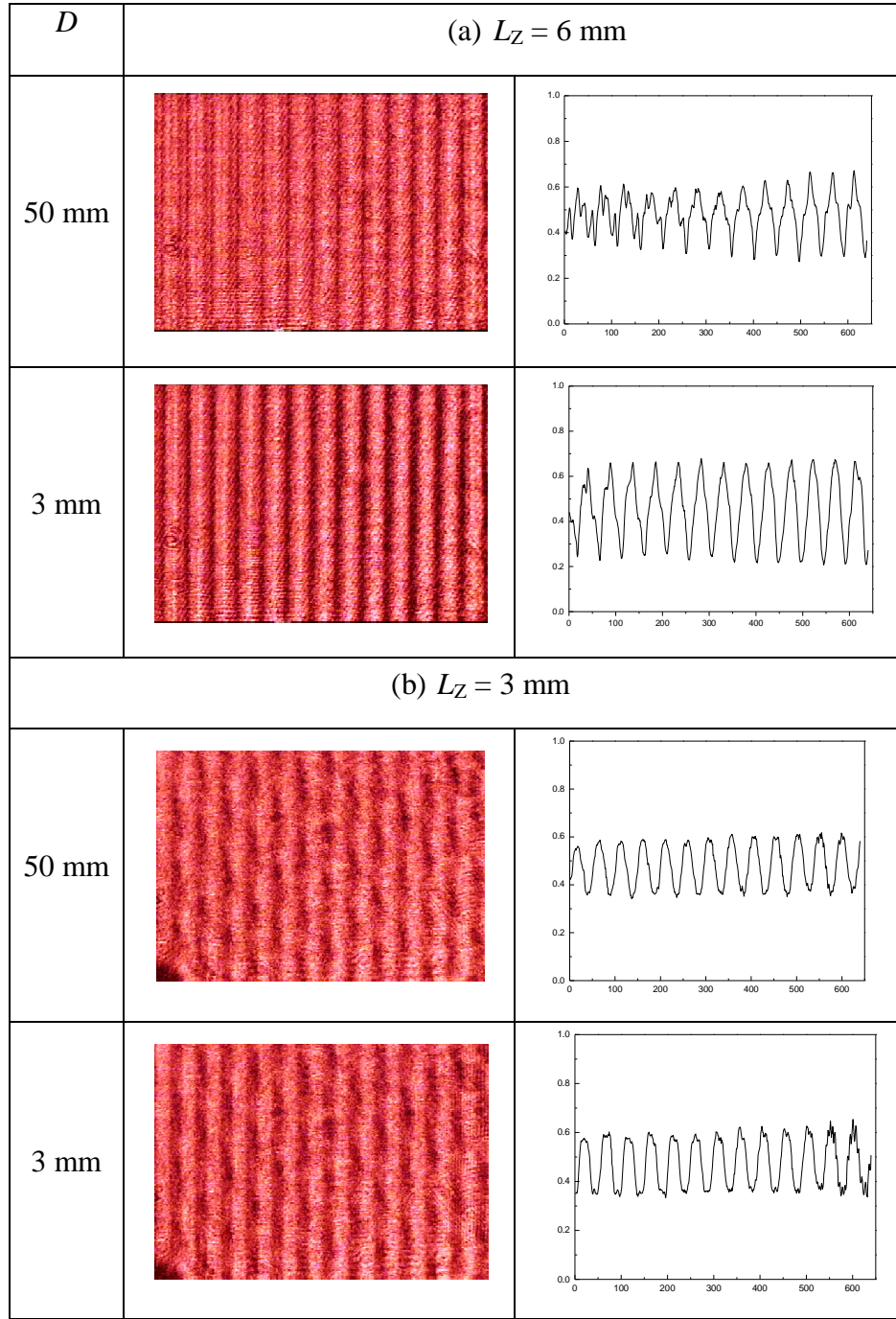


Tabla 5.3: Primera autoimagen generada por redes con diámetro de pupila de salida  $D$  variable. (a) Espesor de cristal  $L_Z = 6 \text{ mm}$ ; (b) Espesor de cristal  $L_Z = 3 \text{ mm}$ .

En esta sección se presentan los patrones experimentales obtenidos usando el dispositivo de la Figura 5.1, sin realizar una discusión pormenorizada de los mismos. Dicho análisis se realizará en la sección siguiente, donde se comparan los resultados que surgen del modelo teórico propuesto con los experimentales. Cada autoimagen se acompaña con su respectivo perfil de intensidad, el cual fue calculado seleccionando una región de promediado sobre el patrón. La necesidad de este promediado se debe a la presencia de ruido coherente generado por la fuente empleada en la etapa de lectura. Nótese que la región de promediado seleccionada influirá en los perfiles y, en consecuencia, en las medidas que se hagan a partir de ellos.

La Tabla 5.1 muestra las autoimágenes y los perfiles de intensidad para valores crecientes del espesor de cristal fotorrefractivo,  $L_Z$ . Los valores del campo eléctrico externo  $E_0$  y del diámetro de la pupila  $D$  coinciden con los usados para simular las redes de la Tabla 4.1, o sea,  $D = 3$  mm y  $E_0 = 7$  kV/cm. Es evidente la mejora en la calidad del patrón a medida que aumenta la distancia en la que el campo se propaga dentro de la red de volumen. En la Tabla 5.2 se observa la influencia que una red fotorrefractiva tiene sobre la calidad de las autoimágenes cuando aumenta el campo externo  $E_0$ . En este caso los parámetros fijos son  $D = 3$  mm y  $L_Z = 3$  mm. El contraste de los patrones de Talbot aumenta con el campo externo. El comportamiento de las autoimágenes en términos del diámetro de la pupila de salida del sistema de registro se muestra en la Tabla 5.3. Se evidencia una mejora en la calidad de los patrones en términos de la disminución del diámetro de la pupila, con un cristal de 6 mm de espesor, mientras no se observa mejora para un cristal de 3 mm de espesor. En esta última tabla el campo es  $E_0 = 7$  kV/cm.

En la sección siguiente se emplea el modelo para analizar el problema de la generación de autoimágenes a partir de una red de volumen fotorrefractiva. En el marco del modelo, se comparan los resultados simulados con los resultados experimentales mostrados en las Tablas 5.1, 5.2 y 5.3.

### 5.3 Aplicación del modelo de integral de camino al cálculo de las autoimágenes generadas por una red de volumen fotorrefractiva. Resultados.

A partir del modelo propuesto en el Capítulo 2, generalizado al caso tridimensional, se obtiene el campo en un punto del plano de observación  $(z, x, y)$  como resultado de la propagación desde la primera interfaz de la red  $(0, x_0, y_0)$ , a través del medio inhomogéneo de la red de índice  $n(z_0, x_0, y_0)$ , hasta la segunda interfaz de la red  $(z_t, x_0, y_0)$ , y luego a través de una región homogénea. La ecuación que describe este proceso es [5.1]

$$\langle z, x, y | \Psi \rangle = \frac{t_F k_r}{2\pi i(z - z_t)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_r[(z-z_t) + \frac{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}{2(z-z_t)}]} e^{ik_r \int_0^{z_t} n(z', x_0, y_0) dz'} \langle 0, x_0, y_0 | \Psi \rangle dx_0 dy_0, \quad (5.1)$$

donde  $k_r = 2\pi/\lambda_r$  es el número de onda del vacío en el proceso de lectura,  $\langle 0, x_0, y_0 | \Psi \rangle$  es el campo a la salida de la primera interfaz y  $t_F$  es el coeficiente de transmisión de Fresnel, el cual es aproximadamente constante dada la baja modulación en el índice de refracción presente en el cristal BSO.

Los parámetros empleados en el arreglo experimental de la Figura 5.1 completan la información necesaria para el cálculo de los patrones de autoimágenes originados por la red.

A partir del cálculo que surge del modelo, la localización de las autoimágenes generadas por la red de volumen fotorrefractiva es la misma que la encontrada para la red de fase plana, siempre que se considere el origen de la coordenada longitudinal en la cara posterior del cristal. Este resultado, confirmado experimentalmente, tiene una fundamentación física: más allá de la modulación en  $z$  de la red de volumen fotorrefractiva, la periodicidad lateral de éste tipo de redes garantiza, *por propagación libre a la salida de la red*, la periodicidad longitudinal del campo. Las dos condiciones son suficientes: la periodicidad lateral y la propagación libre. Esto explica que las autoimágenes de la red de volumen se formen fuera del medio inhomogéneo, es decir, a partir de la cara posterior del cristal. La distancia entre autoimágenes depende del período lateral y de la longitud de onda

del campo de la misma manera que en la fórmula de Rayleigh. Más aún, la secuencia espacial de los patrones reproduce aquella mostrada en la Tabla 3.1 para la red de fase plana, como era de esperar para un objeto cuyo índice de refracción inhomogéneo es real.

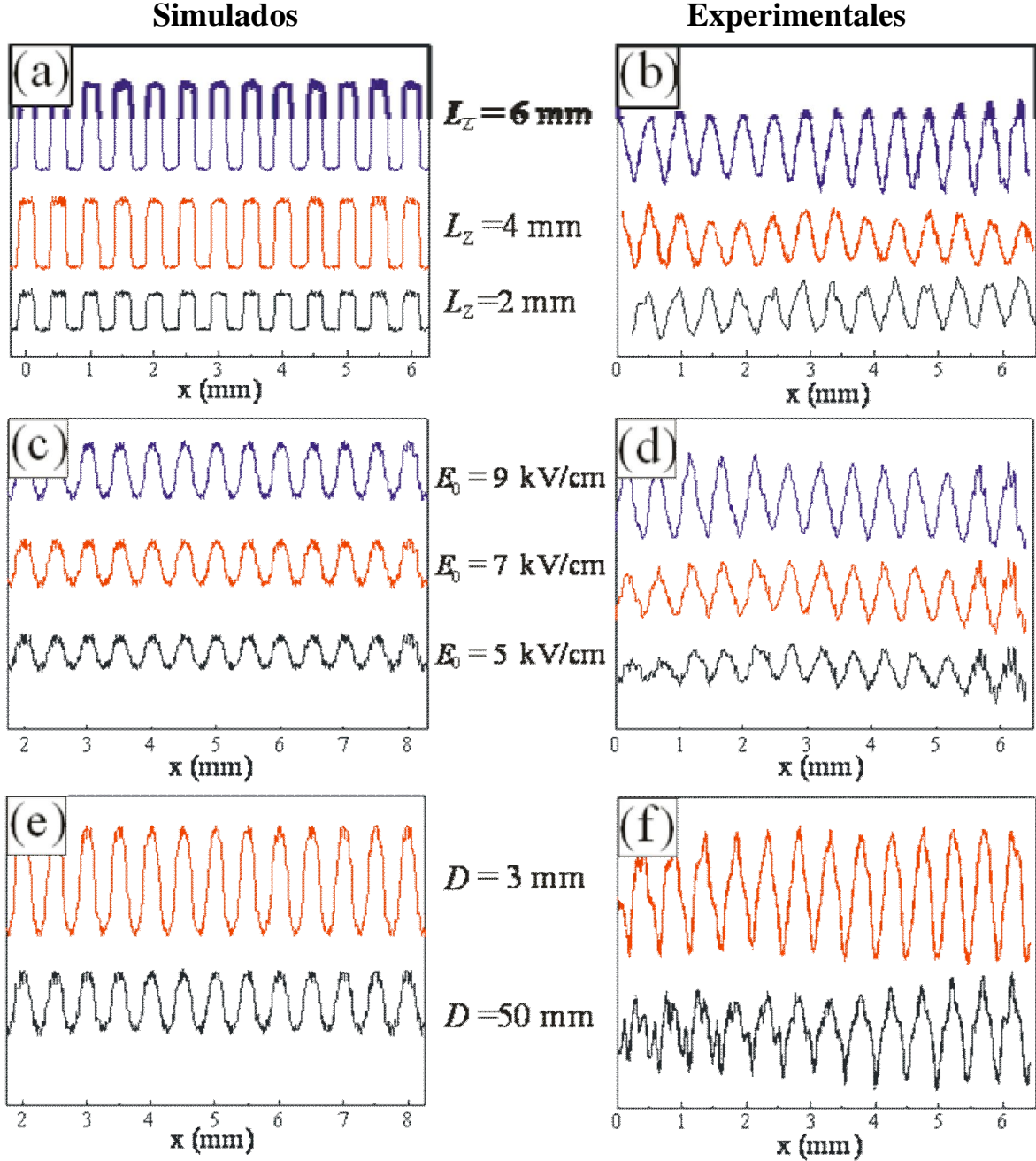


Figura 5.2: Perfil de intensidad de las autoimágenes generadas por redes de índice con diferentes modulaciones. Patrones calculados (a) y experimentales (b) usando las redes descritas en Tabla 4.1; patrones calculados (c) y experimentales (d) usando redes con  $E_0$  creciente,  $D = 3 \text{ mm}$  y  $L_z = 3 \text{ mm}$ ; patrones calculados (e) y experimentales (f) usando redes con  $D$  variable,  $E_0$  y  $L_z$  de la Tabla 4.3.

La Figura 5.2 describe el comportamiento de las autoimágenes generadas por las redes fotorrefractivas en términos de los tres parámetros que caracterizan a la red. En todos los casos se analiza la primera autoimagen, ubicada a  $z = z_T/4 = 197,25$  mm y se varía uno de los parámetros, dejando los otros fijos. Además, se comparan las simulaciones obtenidas a partir del modelo teórico propuesto con los resultados experimentales. [5.2]

En primer lugar, se estudia la calidad de las autoimágenes variando el espesor del cristal, dejando fijos el diámetro de la pupila de salida y el campo eléctrico aplicado al cristal. La Figura 5.2 (a) muestra el perfil de los patrones calculados para tres valores distintos del espesor del cristal,  $L_Z = 2, 4$  y  $6$  mm, con  $D = 3$  mm y  $E_0 = 7$  kV/cm. Estos valores de los parámetros coinciden con los empleados para simular las redes de la Tabla 4.1. Estas redes de volumen muestran una modulación de fase aproximadamente uniforme en la dirección de propagación del campo. Para un valor suficientemente pequeño de la pupila de salida, incrementar el espesor del cristal equivale a aumentar el espesor de la red. La calidad de las autoimágenes originadas por estas redes presenta una mejora notable a medida que se incrementa el espesor del cristal. Este hecho es consecuencia del aumento de la fase acumulada a medida que el campo se propaga a través de dichas redes. En estas condiciones, es evidente la influencia del volumen de la red sobre la calidad de las autoimágenes. La comparación de las simulaciones de la Figura 5.2 (a) con los patrones experimentales de la Figura 5.2 (b) confirma la validez del modelo.

A continuación se analiza el efecto que la variación del campo eléctrico externo aplicado al cristal produce sobre los patrones de Talbot. La Figura 5.2 (c) muestra el perfil de las autoimágenes calculadas usando redes de volumen con un campo eléctrico externo creciente que toma los valores  $E_0 = 5$  kV/cm,  $7$  kV/cm y  $9$  kV/cm. Estos valores de  $E_0$  coinciden con los usados en la Tabla 4.2, donde se observa un aumento en la amplitud de modulación de la red con el aumento del campo aplicado. Un diámetro de pupila  $D = 3$  mm y un espesor del cristal  $L_Z = 3$  mm es usado para el cálculo de las autoimágenes. En este caso, la mejora de la calidad de las autoimágenes se debe a la propagación del campo a través de una red con una amplitud de modulación que crece con el aumento del campo eléctrico aplicado al cristal. El mismo comportamiento se observa en los resultados experimentales mostrados en la Figura 5.2 (d).

Finalmente, la calidad de las autoimágenes se estudia en términos del diámetro de la pupila de salida del sistema. La Figura 5.2 (e) muestra los patrones calculados para  $D = 50$  mm y 3 mm, con valores fijos  $E_0 = 7$  kV/cm y  $L_Z = 6$  mm, que corresponden a las redes de la Tabla 4.3. El patrón calculado a partir de una red registrada con  $D = 50$  mm presenta un menor contraste que para  $D = 3$  mm. Como se verifica en la Tabla 4.3, el comportamiento con  $D = 50$  mm se asocia con la propagación del campo a través de una red de volumen que presenta una atenuación gradual e inversiones en el contraste de la modulación de fase. Como se mencionó, para  $D = 3$  mm, el contraste mejora notablemente. Este comportamiento es confirmado por los patrones experimentales de la Figura 5.2 (f). Por lo tanto, si el espesor de cristal es suficientemente grande, el simple hecho de disminuir el diámetro de la pupila de salida en la etapa de registro de la red de volumen conduce a la formación de autoimágenes con mayor contraste, lo que significa una red de volumen más eficiente en cuanto a la calidad de las autoimágenes que genera.

Consideremos el resultado que se obtiene con los mismos diámetros de la pupila, 50 mm y 3 mm, pero usando un cristal de 3 mm de espesor. Como se observa en la Figura 5.3, disminuir el diámetro de la pupila de salida no conduce a una mejora en el contraste de la autoimagen. En este caso, para una pupila de 50 mm se tiene una red con alta modulación en todo el espesor del cristal. Si bien disminuir el diámetro de la pupila aumenta la extensión de la red, esta no tiene soporte material para replicarse. Por lo tanto, el contraste de la autoimagen permanece invariante.

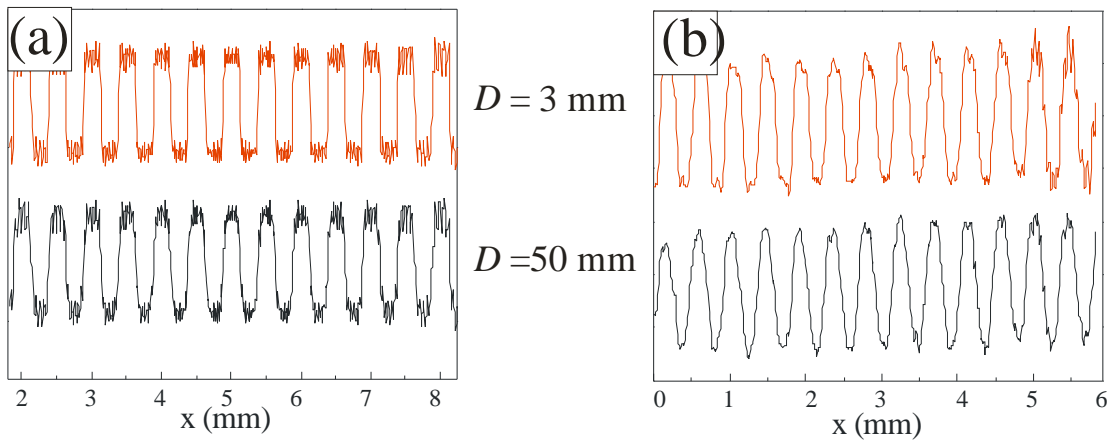


Figura 5.3: Perfil de intensidad de los patrones calculados (a) y experimentales (b) usando redes con  $D$  variable,  $E_0 = 7$  kV/cm y  $L_Z = 3$  mm.

Nótese que en la Figura 5.3 la visibilidad del patrón de autoimagen no cambia para diferentes diámetros de pupila cuando el espesor del cristal es de 3 mm. Esto implica que, dado un espesor del cristal, existe un diámetro de pupila efectivo, en este caso 50 mm, a partir del cual usar valores más pequeños no cambia la visibilidad del patrón. En las condiciones del experimento mostradas en la Figura 4.10, esto equivale a trabajar sin pupila ya que 50 mm es el diámetro de la lente usada para formar imagen en el cristal.

A su vez, dado un diámetro de pupila, cabe preguntarse si habrá un espesor efectivo, de la red de volumen, más allá del cual la visibilidad de la autoimagen que la red genera, no cambia. Para verificar esta hipótesis, se calculan los patrones generados por redes con  $D = 50$  mm,  $E_0 = 7$  kV/cm, y con un valor de  $L_z = 1, 2, 3, 4, 5$  y 6 mm. Los resultados se muestran en la Figura 5.4.

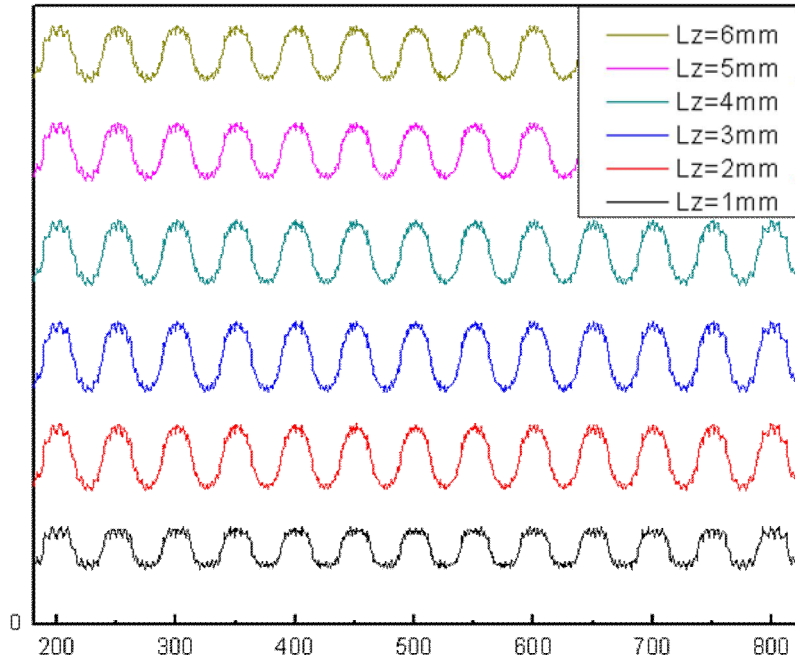


Figura 5.4: Perfil de intensidad de la primera autoimagen en términos del espesor del cristal, para  $D = 50$  mm y  $E_0 = 7$  kV/cm .

Los resultados de la Figura 5.4 permiten hacer una estimación del espesor efectivo de la red. Se observa que hasta un espesor del cristal de 3 mm, la calidad de la autoimagen mejora pero superado este espesor, el patrón permanece sin cambios. Por lo tanto, para un diámetro de pupila de 50 mm, el espesor efectivo de la red se estima en 3 mm. En cambio,

en las Figuras 5.2 (a) y (b), se observa que toda vez que se aumenta el espesor del cristal, la calidad de la autoimagen mejora. En este caso, para un diámetro de pupila de 3 mm, el espesor efectivo resulta ser el espesor del cristal.

En resumen, el análisis de esta sección permite demostrar que existe un compromiso entre los parámetros  $L_z$ ,  $E_0$  y  $D$  que determina la calidad de las autoimágenes cuando una red de fase de volumen almacenada en un cristal fotorrefractivo es usada como objeto difractivo 3D formador de imagen. Un análisis cuantitativo que conduzca a determinar este conjunto de valores se presentará en la Sección 5.5.

## 5.4 Limitaciones en la resolución espacial de la red de volumen

A partir de las Figuras 5.2, (a) y (b), se muestra la importancia que tiene aumentar el espesor del cristal para mejorar la calidad de las autoimágenes. En este punto, se consideran las limitaciones en la resolución geométrica impuestas por el sistema de registro. Para el caso de baja absorción, como ocurre con el cristal fotorrefractivo BSO, la imagen de la red de Ronchi es enfocada en el centro del cristal. La respuesta en frecuencia espacial para magnificación unitaria será [5.3]

$$R \sim \frac{1}{(w/2)} = \frac{4nF\#}{L_z}, \quad (5.2)$$

siendo  $w$  el diámetro del “spot” que forma el haz incidente sobre la primera interfaz del cristal,  $n$  el índice de refracción del cristal para la longitud de onda de registro  $\lambda_r$ ,  $F\#$  el F número del sistema formador de imagen incoherente y  $L_z$  el espesor del cristal. La Ec. (5.2) establece que el límite de resolución del sistema disminuye a medida que aumenta  $L_z$ . Entonces, tanto la capacidad para aumentar la visibilidad de la autoimagen como la resolución espacial deben ser consideradas al momento de elegir el espesor del cristal. A su vez, un diámetro de pupila de salida decreciente (F número creciente) es recomendable, no solo por razones de resolución espacial, sino para mejorar la calidad de los patrones de autoimagen.



## 5.5 Estudio cuantitativo de la visibilidad de las autoimágenes generadas por una red de volumen fotorrefractiva.

En la Sección 5.3 se analizó cualitativamente el comportamiento de las autoimágenes generadas por redes de volumen fotorrefractivas. En esta sección se emplea la definición de visibilidad para hacer un análisis cuantitativo de las autoimágenes,

$$V = \frac{\left| \left| \langle z_T/4, 0 | \Psi \rangle \right|^2 - \left| \langle z_T/4, d/2 | \Psi \rangle \right|^2 \right|}{\left| \langle z_T/4, 0 | \Psi \rangle \right|^2 + \left| \langle z_T/4, d/2 | \Psi \rangle \right|^2} \quad (5.3)$$

donde se aplica la definición al plano de la primera autoimagen,  $z_T/4$ .

En el trabajo de Tu Jinhong, se establece que para una red de fase binaria plana, la visibilidad de las autoimágenes sólo depende de la amplitud de modulación de la red,  $\delta n_f$ , según  $V = \text{sen} \delta n_f$  [5.4].

Un resultado a ser tenido en cuenta fue mostrado en la Sección 3.3 cuando se estudió la red de fase binaria de volumen con una modulación constante en la dirección de propagación del campo. La visibilidad de las autoimágenes generadas por esta red depende tanto de la amplitud de modulación como del espesor de la red, en la siguiente forma [5.1]

$$V = \text{sen} \beta, \quad \beta = k_0 \delta n_f L_Z \quad (5.4)$$

donde  $\beta$  es el parámetro de fase que da cuenta del volumen de la red, siendo una generalización del parámetro  $\delta n_f$ . A partir de esta ecuación, una pequeña amplitud de modulación puede ser compensada por un adecuado espesor de la red  $L_Z$  hasta lograr el valor  $\beta = \pi/2$ , en cuyo caso  $V$  adquiere su máximo valor.

En esta Tesis, se propone el siguiente parámetro de fase adecuado a una red de volumen fotorrefractiva, que tiene en cuenta la modulación variable de la red en la dirección longitudinal [5.2]

$$\beta_{mod} = k_r \left( \int_0^{L_Z} (\Delta n(0, z'; E_0, D, L_Z) - \Delta n(d/2, z'; E_0, D, L_Z)) dz' \right) \quad (5.5)$$

donde  $k_r = k_0$  y  $\Delta n(x_0, z_0; E_0, D, L_Z)$  está dado por la Ec. (4.32). El parámetro  $\beta_{mod}$  así definido, representa una generalización del parámetro de fase  $\beta$ , dado que tiene en cuenta

la modulación transversal neta resultante de la propagación del campo a través de la red de volumen. Nótese que, si en la Ec (5.5)  $\Delta n$  es constante en  $z$ , entonces  $\beta_{mod} = k_0 \delta n_f L_Z$ , como corresponde a las redes sin modulación longitudinal. A su vez, si  $L_Z \rightarrow \lambda/2\pi$ , entonces  $\beta \rightarrow \delta n_f$  como ocurre con las redes planas que tienen un espesor finito.

Además, se puede pensar  $\beta_{mod}$  como el parámetro de una red plana que tenga una modulación equivalente a la modulación neta del campo propagado a través de la red de volumen.

Un aspecto importante a tener en cuenta en la definición de la Ec. (5.5) es el hecho de que incluye los tres parámetros usados para caracterizar las redes fotorrefractivas, y por lo tanto, desde el punto de vista matemático, permite estudiar de forma unificada la influencia que cada uno de esos parámetros tiene sobre las autoimágenes.

A continuación, se explora la visibilidad de las autoimágenes generadas por la red fotorrefractiva, dada por la Ec. (5.3), en términos del parámetro de fase definido por la Ec. (5.5), variando cada uno de los parámetros que caracterizan a la red. En la Figura 5.5, se grafican los valores que toma la visibilidad de la primera autoimagen en términos de  $\beta_{mod}$  para un espesor del cristal  $L_Z$  creciente. La visibilidad de los patrones teóricos, incluyendo aquellos mostrados en la Figura 5.2 (a), es graficada en términos del parámetro  $\beta_{mod}$  calculado para la red de volumen correspondiente a cada patrón. En el mismo gráfico se muestra la visibilidad de los patrones experimentales. En el caso de los patrones medidos, el valor promedio de la visibilidad y su desviación estándar se calculan sobre todos los pares de máximos y mínimos de intensidad consecutivos.

Se observa un acuerdo razonable entre valores teóricos y experimentales, siendo en algunos casos, donde los intervalos de incerteza se solapan, un acuerdo exacto. A su vez, los resultados teóricos reproducen el ritmo de crecimiento que muestra la visibilidad de los patrones experimentales a medida que el espesor del cristal aumenta. Solo un punto, el correspondiente a la visibilidad del patrón experimental generado por una red con  $L_Z = 6$  mm, se aparta del comportamiento general. Este hecho se debe al uso de un cristal que presentaba una respuesta anómala debido a zonas de deterioro. El origen de este deterioro del material se vincula con el uso de un potencial aplicado al cristal que es del orden del

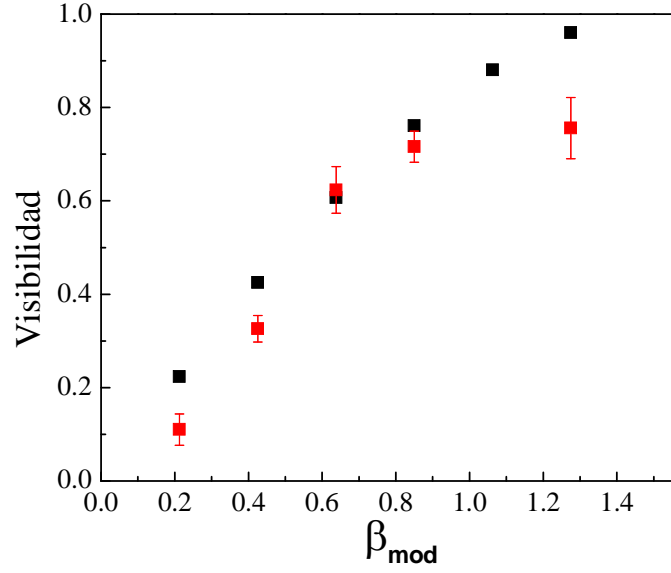


Figura 5.5: Visibilidad de los patrones teóricos (■) y experimentales (■) vs. parámetro de fase  $\beta_{\text{mod}}$  para  $L_z = 1, 2, 3, 4, 5$  y 6 mm con valores fijos de  $D = 3$  mm and  $E_0 = 7$  kV/cm

potencial de ruptura del aire, ocasionando la generación de pequeñas descargas eléctricas en ciertas condiciones atmosféricas.

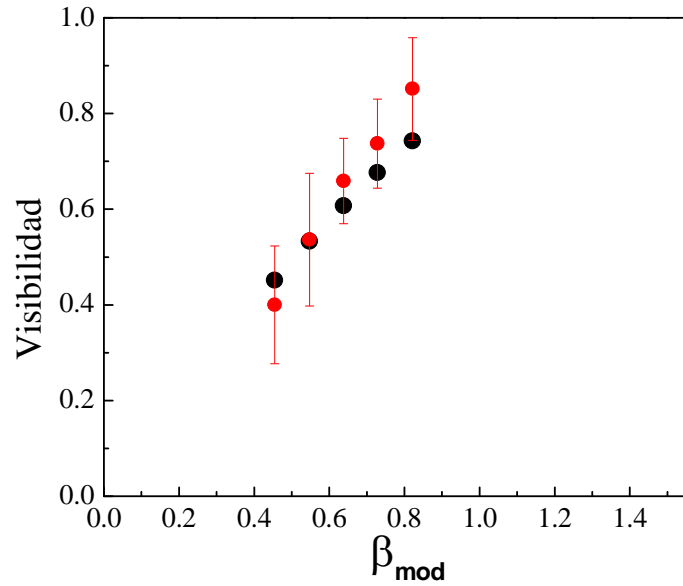


Figura 5.6: Visibilidad de los patrones teóricos (●) y experimentales (●) vs. parámetro de fase  $\beta_{\text{mod}}$  para  $E_0 = 5, 6, 7, 8$  and 9 kV/cm con valores fijos de  $D = 3$  mm y  $L_z = 3$  mm.

En la Figura 5.6 se compara la visibilidad de los patrones teóricos y experimentales, en términos del parámetro  $\beta_{mod}$  calculado para la red de volumen correspondiente a cada patrón, para un campo externo  $E_0$  creciente. En este caso, el acuerdo es exacto para todos los valores que toma el campo externo. Los intervalos de incerteza grandes que presenta la visibilidad de las autoimágenes medidas se deben a la dispersión de los valores máximos y mínimos a lo largo de los patrones (ver Figura 5.2 (d)). Como fue comentado en la Sección 5.2, esta dispersión es afectada por la región de promediado seleccionada sobre el patrón para el cálculo de los perfiles de intensidad. Otra causa que origina este comportamiento puede provenir de una distribución luminosa ligeramente no uniforme en la etapa de registro, generada por la fuente de iluminación incoherente.

La comparación entre la visibilidad teórica y experimental de los patrones cuando el diámetro de pupila  $D$  disminuye se muestra en la Figura 5.7, en términos del parámetro  $\beta_{mod}$  correspondiente a la red que genera los patrones. Los resultados se distribuyen en dos grupos bien diferenciados.

El grupo de baja visibilidad se muestra en la selección hecha en la Figura 5.7 (b). Este grupo corresponde a diámetros de pupila  $D = 50$  mm y  $D = 3$  mm, con  $L_Z = 3$  mm (ángulo inferior izquierdo), y  $D = 50$  mm y  $D = 25$  mm, con  $L_Z = 6$  mm. Como se observó en la Sección 5.3, con  $L_Z = 3$  mm, disminuir el diámetro de pupila desde  $D = 50$  mm a  $D = 3$  mm no produce una mejora en la visibilidad de las autoimágenes. Este hecho es confirmado por los dos valores cercanos de visibilidad para  $L_Z = 3$  mm,  $V = 0,22$  y  $0,23$  (teóricos) y  $V = 0,23$  y  $0,24$  (experimentales). A su vez, con  $L_Z = 6$  mm, mantener el diámetro de la pupila en valores grandes como  $D = 50$  mm o  $D = 25$  mm tampoco mejora la visibilidad ya que el espesor efectivo de la red es mucho menor que 6 mm. Nótese que los valores de visibilidad con  $L_Z = 3$  mm, teóricos y experimentales, muestran un acuerdo exacto. Sin embargo, con  $L_Z = 6$  mm, se observa una discordancia que tiene su origen en la respuesta anómala del cristal.

El grupo de alta visibilidad, cercana a 1, corresponde a diámetros de pupila  $D = 5$ ,  $3$  y  $2$  mm, con  $L_Z = 6$  mm (Figura 5.7 (a)). El valor experimental para la visibilidad con  $D = 3$  mm, se aparta de la predicción teórica, debido a la mencionada respuesta anómala del cristal.

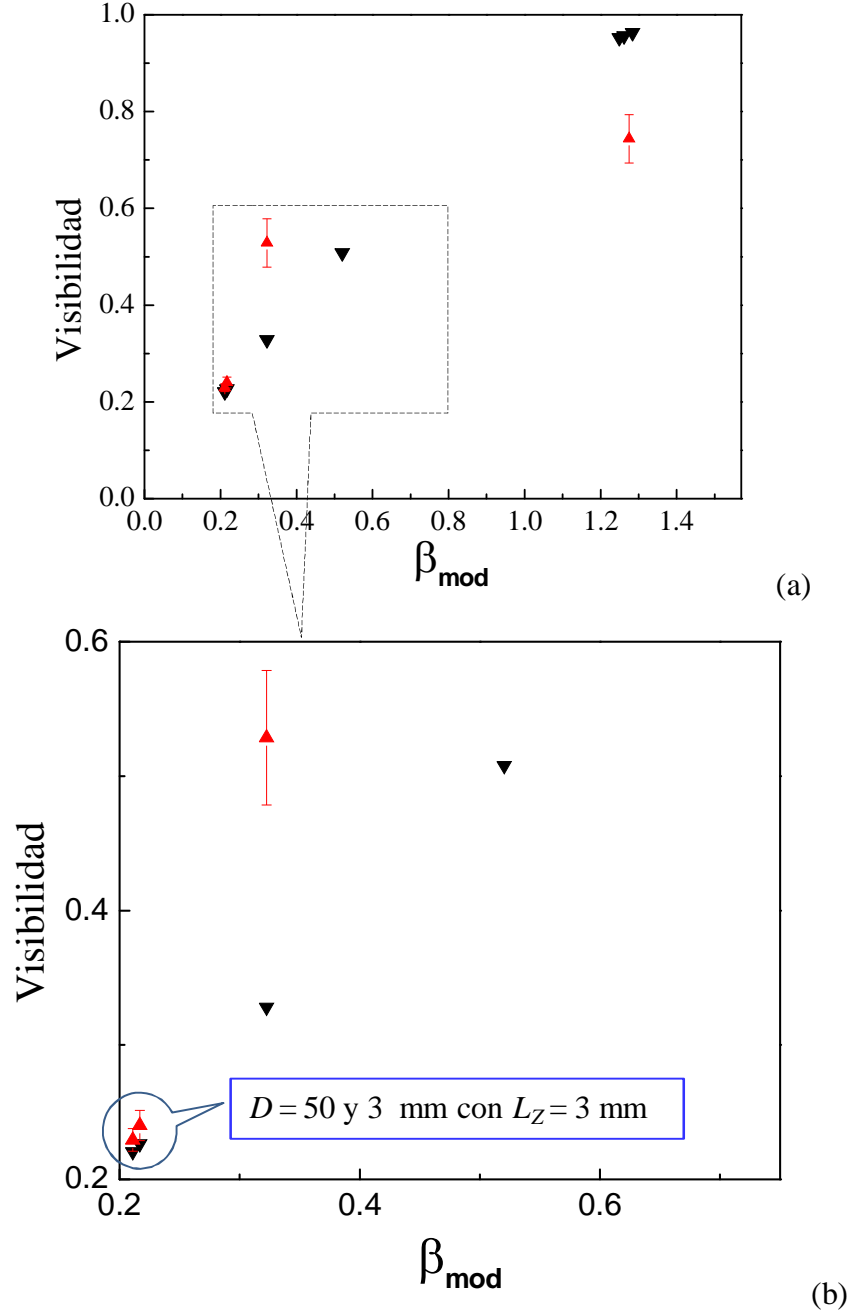


Figura 5.7: (a) Visibilidad de los patrones teóricos ( $\blacktriangledown$ ) y experimentales ( $\blacktriangle$ ) vs. parámetro de fase  $\beta_{\text{mod}}$ , para  $D = 50$  y  $3$  mm con  $L_Z = 3$  mm;  $D = 50$  y  $25$  mm con  $L_Z = 6$  mm;  $D = 5, 3$  y  $2$  mm con  $L_Z = 6$  mm. En todos los casos se usó  $E_0 = 7$  kV/cm. (b) Selección hecha sobre figura a) correspondiente a baja visibilidad

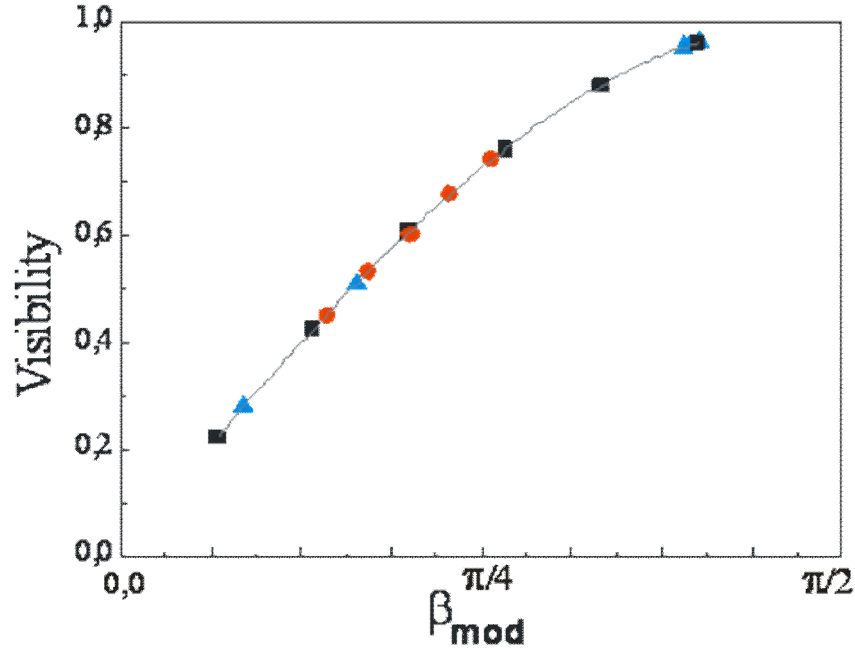
El acuerdo observado entre los valores de la visibilidad de las autoimágenes teóricas y experimentales valida los modelos propuestos en esta tesis. Por una parte, el modelo considerado en la etapa de registro para explicar la formación de la red de índice en un cristal fotorrefractivo usando luz incoherente. Por otra parte, el modelo basado en la

formulación de integral de camino usado para propagar el campo luminoso en el medio inhomogéneo, asociado al parámetro  $\beta_{mod}$  y que permite calcular los patrones teóricos en la etapa de lectura.

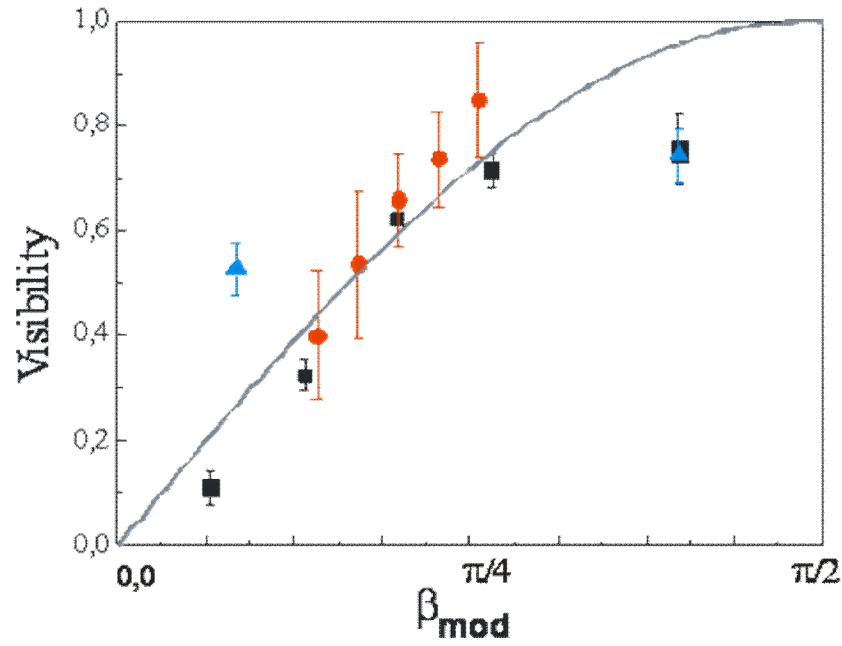
Las Figuras 5.5, 5.6 y 5.7 confirman la tendencia observada en los patrones: la visibilidad aumenta con el espesor del cristal, con el campo externo aplicado al cristal e inversamente con el diámetro de la pupila de salida del sistema de registro de la red. La dependencia funcional que sigue la visibilidad cuando se estudia en términos del parámetro  $\beta_{mod}$  se obtiene de un ajuste por cuadrados mínimos.

La Figura 5.8 (a) muestra el ajuste mediante una curva sinusoidal de todos los valores teóricos de la visibilidad. En la Figura 5.8 (b) se considera en conjunto la visibilidad de todos los patrones experimentales, los cuales se acompañan con el gráfico de la función seno con fines comparativos. Se comprueba tanto teórica como experimentalmente, que la visibilidad de las autoimágenes generadas por la red de volumen fotorrefractiva, mantiene su dependencia sinusoidal cuando es estudiada en términos del parámetro  $\beta_{mod}$  definido por la Ec. 5.5 [5.2]. Este nuevo parámetro propuesto representa una generalización del previamente usado por Tu Jinhong para una red de fase binaria plana [5.4] y el usado por G. Forte et al. para una red de fase binaria de volumen con una modulación constante en la dirección de propagación del campo [5.1].

Es de notar en la Figura 5.8 (b), la presencia de dos puntos, uno correspondiente a la serie con  $L_Z$  variable (cuadrado negro) y el otro correspondiente a la serie con  $E_0$  variable (círculo rojo), cuyas barras de incertidumbre se solapan. Ellos corresponden a distintos patrones experimentales con el mismo valor de  $\beta_{mod}$  (iguales valores de los tres parámetros) y el valor de visibilidad que adquieren las autoimágenes no es distinto. La misma situación es observada en otros dos puntos, uno correspondiente a la serie  $L_Z$  variable y el otro correspondiente a la serie  $D$  variable (triángulo azul). De la misma manera, el comportamiento de ambos pares son observados en la Figura 5.8 (a) a partir de los patrones teóricos.



(a)



(b)

Figura 5.8: Visibilidad de las autoimágenes vs. parámetro de fase  $\beta_{\text{mod}}$  para: (a) patrones teóricos: ■  $L_z = 1, 2, 3, 4, 5$  y 6 mm con valores fijos de  $D=3$  mm and  $E_0=7$  kV/cm; ●  $E_0= 5, 6, 7, 8$  and 9 kV/cm con valores fijos de  $D=3$  mm and  $L_z = 3$  mm; ▲  $D=50, 25, 10, 5$  and 3 mm con valores fijos de  $L_z=6$  mm and  $E_0=7 \times 10^2$  kV/m; (b) patrones experimentales: ■  $L_z = 1, 2, 3, 4$  and 6 mm con valores fijos de  $D=3$  mm y  $E_0=7$  kV/cm; ●  $E_0= 5, 6, 7, 8$  and 9 kV/cm con valores fijos de  $D=3$  mm y  $L_z = 3$  mm; ▲  $D=50$  and 3 mm con valores fijos de  $L_z=6$  mm y  $E_0=7 \times 10^2$  kV/m.

Es relevante comparar el comportamiento de la red de fase plana y la red de fase de volumen, en especial, la red fotorrefractiva, en cuanto a la calidad de las autoimágenes que las mismas generan. Es bien sabido que a partir de una red de fase plana es posible lograr una visibilidad unitaria fijando la amplitud de modulación de la red en el valor  $\pi/2$ . A la luz de los resultados de esta sección, queda demostrado que una red de volumen fotorrefractiva es una red sintonizable, mediante el ajuste de ciertos parámetros que determinan las características de la red, de manera tal de lograr, en particular, una visibilidad unitaria. Por lo tanto, las redes de volumen fotorrefractivas muestran una mayor versatilidad, siendo su comportamiento regulable en base a las necesidades de un determinado experimento. Visto como un subsistema óptico para el control de la visibilidad de las autoimágenes, puede ser aprovechado en dispositivos de procesamiento de la información.

## 5.6 Referencias

- [5.1] G. Forte, A. Lencina, M. Tebaldi, N. Bolognini, “Self-imaging by a volume grating”, *Opt. Commun.* **284** (2011) 2494.
- [5.2] G. Forte, A. Lencina, M. Tebaldi, N. Bolognini, “Talbot effect by a photorefractive volume phase grating”, *Applied Optics*. **51** (2012) 479.
- [5.3] J. W. Yu, D. Psaltis, A. Marrakchi, A. Tanguay and R. Johnson, *Photorefractive Materials and their Applications I*, Vol. 62, Eds. P. Günter and J. P. Huignard, Springer Verlag, Berlin Heidelberg (1988).
- [5.4] T. Jinhong, “The diffraction near fields and Lau effect of a square-wave modulated phase grating”, *J. Mod. Opt.* **35**, 1399-1408 (1988).



# CAPÍTULO 6

## Conclusiones generales

---

### 6.1 Conclusiones generales

El interés que despiertan las redes de volumen usadas para la difracción de campos ópticos se encuentra en la tridimensionalidad inherente al proceso de interacción de la red con el campo. En comparación con las redes planas, la interacción de la luz con el volumen de la red permite una riqueza fenomenológica adicional, y exige una mayor riqueza conceptual para explicar los fenómenos.

En el Capítulo 2 se desarrolla un modelo teórico propuesto para analizar la difracción de ondas electromagnéticas en redes de volumen. A partir de las ecuaciones de Maxwell en un medio lineal, isótropo y débilmente inhomogéneo, se llega a una ecuación con soluciones de onda locales, cuyo número de onda depende de la posición. Se utiliza una formulación de integral de camino para propagar los campos locales sobre todos los caminos que atraviesan el medio. Usando un principio variacional sobre la integral de camino, se calculan los caminos permitidos por el principio de Fermat y se determina el propagador del campo a través del medio inhomogéneo, a primer orden y a orden cero. El propagador se aplica a todo el campo inicial, para dar el campo total a la salida de la red de volumen. Luego, el campo se propaga libremente hasta un plano de observación arbitrario, donde se obtiene la expresión de la amplitud compleja del campo final.

El efecto Talbot es uno de los fenómenos más fundamentales de la Óptica física, conocido a partir de la interacción de campos de ondas con objetos periódicos planos. En el Capítulo 3 se analiza la influencia que tiene la interacción de campos de luz con el volumen de una red tridimensional sobre los patrones de Talbot. Se utiliza el modelo de integral de camino teniendo en cuenta la propagación inhomogénea a orden cero para la difracción producida por una red de volumen binaria con periodicidad 1D transversal. Se analizan redes de amplitud pura, de fase pura, y complejas, en todos los casos a incidencia normal. En el caso de redes complejas, se consideran dos casos: ambas modulaciones en fase y

fuera de fase. Para todos estos tipos de redes, se calcula la amplitud de los patrones generados en el campo de Fresnel; luego se usa la visibilidad como herramienta matemática para caracterizar los patrones, y a partir de esta descripción, seleccionar y localizar las autoimágenes y los patrones fraccionarios de alta visibilidad.

La amplitud de los patrones calculados para redes de volumen de amplitud pura y fase pura, muestra una dependencia con un parámetro, absorbente ( $\gamma$ ) y refractivo ( $\beta$ ), respectivamente. En ambos casos, el parámetro es proporcional a la amplitud de modulación y al espesor, ambos de la red.

La expresión que determina la posición de las autoimágenes y los patrones intermedios de alta visibilidad, para ambos tipos de redes, no depende del parámetro de volumen y coincide con la fórmula de Rayleigh, utilizada para redes planas:  $z = (N + n)z_T$ , donde  $z_T = 2d^2/\lambda$  es la distancia de Talbot,  $N$  es un número entero y  $n$  es un número real entre 0 y 1. La red de volumen de amplitud pura genera autoimágenes para  $n=0$ ,  $n=0,5$  y  $n=1$ , mientras que la red de volumen de fase pura lo hace para  $n=0,25$ ,  $n=0,75$  y  $n=1,25$ . Para ambos tipos de redes, los patrones intermedios de alta visibilidad ocurren para  $n=0,125$  y  $n=0,875$ . Sin embargo, la visibilidad presenta una dependencia con el parámetro de volumen y mejora notablemente mediante un ajuste adecuado de la amplitud de modulación y el espesor de la red.

Para el caso de redes de volumen complejas, cuyas modulaciones están en fase, la amplitud de los patrones muestra una dependencia con ambos parámetros de volumen. Se resume el análisis para los planos  $n=0$ ,  $n=0,125$ ,  $n=0,25$  y  $n=0,375$ . Para  $n=0$  y  $n=0,25$  se reproducen los resultados correspondientes a la red de volumen de amplitud pura y fase pura, respectivamente. En cambio, el plano de alta visibilidad  $n=0,125$  resulta ser un plano de autoimagen por una adecuada elección de los parámetros absorbente y refractivo. De hecho, la visibilidad alcanza la unidad para  $\beta=\pi/2$  y el irracional  $\gamma = \ln(1 + \sqrt{2}) = 0,881374$ . Ambas modulaciones periódicas de la red, de amplitud y de fase, tienen cada una un plano de alta visibilidad en esa posición; luego, superpuestas en fase contribuyen a formar una autoimagen. A su vez, el plano de alta visibilidad  $n=0,375$  resulta ser un plano de uniformidad para ciertos valores de los parámetros absorbente y refractivo. En este plano, la modulación de fase genera un patrón positivo de alta visibilidad, mientras que la

modulación de amplitud genera un patrón de alta visibilidad pero negativo; luego, superpuestas en fase contribuyen a formar un patrón de visibilidad nula. Estos resultados singulares, para  $n=0,125$  y  $n=0,375$ , constituyen una característica propia de la red compleja.

Se analizan los patrones calculados para redes complejas de volumen con un desplazamiento de fase relativo entre las modulaciones de amplitud y fase. El desplazamiento lateral de la modulación de amplitud (fase) se observa también en su plano de autoimagen, para  $n=0$  ( $n=0,25$ ). Para  $n=0,125$  el patrón puede ser no binario como consecuencia de la interacción entre las modulaciones de fase y amplitud. Este patrón resulta particularmente interesante cuando  $\gamma \gtrsim 3$  y  $\beta = \pi/2$ . A medida que el desplazamiento relativo entre ambas modulaciones se aproxima a medio período el perfil de intensidad se aproxima a un “peine” de amplitud sobre un fondo uniforme.

A partir de los resultados del Capítulo 3 se concluye que el modelo de integral de camino revela resultados llamativos cuando es utilizado para calcular los patrones de Talbot generados por redes de volumen binarias moduladas en amplitud y/o fase. La característica distintiva de todas estas redes es la capacidad de controlar la visibilidad de las autoimágenes introduciendo un nuevo grado de libertad asociado al volumen.

El Capítulo 4 incluye un estudio teórico y experimental de redes de volumen almacenadas en medios fotorrefractivos, en particular, mediante un registro no holográfico con luz incoherente.

Se presenta el arreglo experimental utilizado para el registro de una red de volumen fotorrefractiva generada con luz incoherente. La imagen de una red de Ronchi de baja frecuencia iluminada incoherentemente es proyectada dentro de un cristal BSO. Un filtro interferencial centrado en una longitud de onda dentro del rango de alta sensibilidad del cristal es usado en la etapa de registro. De esta manera, una distribución de intensidad luminosa es interceptada por el volumen del cristal. Es posible controlar esta distribución 3D colocando un diafragma detrás de la lente formadora de imagen para variar el diámetro de la pupila de salida. Esta distribución de intensidad es replicada en una perturbación de índice de refracción vía el efecto fotorrefractivo, generando de este modo una red de fase de volumen con el mismo vector de onda que la red plana de entrada. Un campo eléctrico estático se aplica al cristal en una dirección paralela al vector de onda de la red.

Sobre la base de toda la teoría presentada en este capítulo, se propone un modelo teórico para la simulación de la red de volumen fotorrefractiva generada con luz incoherente. Se calcula la distribución de intensidad de luz  $I \equiv I(x_0, y_0, z_0; D)$  en el plano imagen y sus cercanías (planos de desenfoque) considerando un error de enfoque en la Función de Transferencia Óptica (FTO) del sistema óptico de registro. Como se mencionó en la descripción del arreglo experimental, la distribución de intensidad de luz depende del diámetro  $D$  de la pupila de salida del sistema de registro. El efecto fotorrefractivo se encarga de mapear esta imagen 3D en una red de índice,  $n(x_0, y_0, z_0; E_0, D, L_z) = n_0 + \Delta n(x_0, y_0, z_0; E_0, D, L_z)$ , siendo  $n_0$  el índice de refracción del cristal BSO para la longitud de onda de registro y  $\Delta n(x_0, y_0, z_0; E_0, D, L_z) = \Delta n_0(E_0) I(x_0, y_0, z_0; D) \text{rect}(z_0/L_z)$  la modulación de índice, donde  $E_0$  es el campo eléctrico externo aplicado al cristal y  $L_z$  es el espesor del cristal.

En síntesis, es importante destacar que el modelo permite caracterizar la red de volumen fotorrefractiva generada con luz incoherente en términos de tres parámetros: el diámetro de la pupila de salida del sistema óptico de registro,  $D$ , el campo eléctrico externo,  $E_0$ , y el espesor del cristal,  $L_z$ . El diámetro de la pupila de salida determina el desenfoque de la imagen que mapea la red de volumen, y por lo tanto, la región en la cual la amplitud de modulación es máxima, así como las variaciones en la modulación longitudinal. El campo externo aplicado al cristal controla la amplitud de la modulación de la red de índice. El espesor del cristal  $L_z$  es el límite del soporte material que origina la red de volumen.

Un punto clave en la descripción que el modelo ofrece de las redes de volumen se encuentra en la FTO del sistema formador de imagen incoherente desenfocado. En este modelo, la FTO se presenta con una dependencia explícita respecto de la coordenada longitudinal  $z$ , tomada como parámetro, aparte de la ya conocida dependencia con la frecuencia espacial del objeto. El efecto que la FTO produce sobre la imagen es invariante tanto si se expresa la función en términos de la frecuencia espacial normalizada, como si se expresa en términos de la coordenada longitudinal normalizada. El uso de esta coordenada longitudinal como un parámetro es más adecuado para el análisis de la formación de la imagen 3D que genera la red de volumen, ya que cada valor de  $z$  se corresponde con un plano de desenfoque distinto (una sección transversal distinta de la red).

La simetría de la FTO destacada en el Capítulo 4 permite describir en un mismo formalismo matemático el efecto que el desenfoque produce sobre la imagen de la llamada Estrella de Siemens y sobre la imagen de una red de Ronchi. La imagen de la Estrella de Siemens presenta inversiones de contraste en la dirección radial, dirección en la cual varía la frecuencia para esta clase de objetos, mientras que la imagen de la red de Ronchi muestra inversiones de contraste en la dirección longitudinal, como queda confirmado en los resultados experimentales presentados en este capítulo. Estas inversiones de contraste quedan mapeadas en la red de índice de volumen generada por efecto fotorrefractivo, siendo esta una característica distintiva de este tipo de redes generadas con luz incoherente, puesta en evidencia por el modelo propuesto.

El Capítulo 5 está dedicado al estudio teórico y experimental de las propiedades de la red de fase de volumen almacenada en un cristal fotorrefractivo como objeto formador de autoimágenes. Se emplea el modelo teórico que incluye la formulación de integral de camino para la propagación del campo a través de la red fotorrefractiva y la posterior propagación libre hasta la formación de los patrones de autoimágenes. Previo al análisis teórico, se describe el dispositivo usado para la lectura de la red fotorrefractiva de volumen y se muestran los patrones experimentales. Luego, para el empleo del modelo, se evalúa la inhomogeneidad representada por  $n(x_0, y_0, z_0; E_0, D, L_z)$  en la ecuación que expresa la amplitud del campo difractado. Se analiza el comportamiento de las autoimágenes en términos de los parámetros que gobiernan la generación de la red fotorrefractiva de volumen. Se comparan los perfiles de los patrones teóricos y experimentales.

A partir del cálculo que surge del modelo, la localización de las autoimágenes generadas por la red de volumen fotorrefractiva es la misma que la encontrada para la red de fase plana, siempre que se considere el origen de la coordenada longitudinal en la cara posterior del cristal. La distancia entre autoimágenes depende del período lateral y de la longitud de onda del campo de la misma manera que en la fórmula de Rayleigh.

En primer lugar, se estudia la calidad de las autoimágenes variando el espesor del cristal, dejando fijos el diámetro de la pupila de salida y el campo eléctrico aplicado al cristal. La calidad de las autoimágenes originadas por estas redes presenta una mejora notable a medida que se incrementa el valor de  $L_z$ , siempre que  $D$  sea lo suficientemente pequeño, para un valor arbitrario de  $E_0$ . Este comportamiento, hallado teóricamente y

confirmado experimentalmente, encuentra una fundamentación en las redes simuladas usando idénticos valores de los parámetros: estas redes de volumen muestran una modulación de fase aproximadamente uniforme en la dirección de propagación del campo. Como fue calculado y verificado experimentalmente, la distribución de intensidad de luz depende del diámetro  $D$  de la pupila de salida del sistema de registro. En consecuencia, para un valor suficientemente pequeño de  $D$ , el espesor efectivo de la red resulta ser  $L_z$ . En estas condiciones, la mejora en la calidad de la autoimagen es consecuencia del aumento de la fase acumulada a medida que el campo se propaga a través de dichas redes. Por otro lado, los resultados teóricos muestran, que la calidad de las autoimágenes no mejora a medida que se incrementa el valor de  $L_z$ , siempre que  $D$  sea lo suficientemente grande, para un valor arbitrario de  $E_0$ . Este comportamiento se explica a partir de las redes simuladas con estos parámetros: dichas redes de volumen presentan una atenuación gradual e inversiones en el contraste de la modulación en la dirección de propagación del campo. Para un valor suficientemente grande de  $D$ , el espesor efectivo de la red no se corresponde con el espesor del cristal, sino que está asociado con la región dentro del cristal en la que la red tiene máxima modulación. Este espesor efectivo no cambia aún con el aumento de  $L_z$ , dando como resultado una autoimagen de contraste invariante.

A continuación se analiza el efecto que la variación del campo eléctrico externo aplicado al cristal produce sobre los patrones de Talbot. En este caso, la calidad de las autoimágenes mejora a medida que aumenta  $E_0$ . Este comportamiento se debe a la propagación del campo a través de una red con una amplitud de modulación que crece con el aumento del campo eléctrico aplicado al cristal.

Finalmente, la calidad de las autoimágenes se estudia en términos del diámetro de la pupila de salida del sistema. En este caso, si  $L_z$  es suficientemente grande, el simple hecho de disminuir  $D$  conduce a la formación de autoimágenes con mayor contraste, lo que significa una red de volumen más eficiente en cuanto a la calidad de las autoimágenes que genera. En este caso, el espesor efectivo de la red coincide con el espesor del cristal. Por otra parte, si  $D$  es suficientemente grande, el hecho de aumentar el espesor del cristal no mejora la calidad de las autoimágenes. En este caso, el espesor efectivo corresponde a la región dentro del cristal donde la amplitud de modulación es máxima. A su vez, es notable

el resultado que se obtiene usando un cristal más delgado. En este caso, disminuir  $D$  no conduce a una mejora en el contraste de la autoimagen. Si bien disminuir el diámetro de la pupila aumenta la extensión de la distribución de intensidad luminosa del registro, esta no tiene soporte material para replicarse. En esta situación, el espesor efectivo de la red coincide nuevamente con el espesor del cristal. Por lo tanto, el contraste de la autoimagen permanece invariante.

En síntesis, los resultados de este capítulo demuestran que existe un compromiso entre los parámetros  $L_Z$ ,  $E_0$  y  $D$  que determina la calidad de las autoimágenes cuando una red de fase de volumen almacenada en un cristal fotorrefractivo es usada como objeto difractivo.

Para un análisis cuantitativo de las autoimágenes se emplea la visibilidad. Como punto de partida de este análisis se considera el trabajo teórico de Tu Jinhong, donde se establece que para una red de fase binaria plana, la visibilidad de las autoimágenes sólo depende de la amplitud de modulación de la red,  $\delta n_f$ , según  $V = \text{sen} \delta n_f$ . En el Capítulo 3 se determina la visibilidad de las autoimágenes que genera una red de fase binaria de volumen con una modulación constante en la dirección de propagación del campo. En este caso, la visibilidad depende tanto de la amplitud de modulación como del espesor de la red, en la forma  $V = \text{sen} \beta$ , con  $\beta = k_0 \delta n_f L_Z$ . A partir de esta ecuación, una baja amplitud de modulación puede ser compensada por un adecuado espesor de la red  $L_Z$  hasta lograr el valor  $\beta = \pi/2$ , en cuyo caso  $V$  adquiere su máximo valor. En el Capítulo 5, se propone un parámetro de fase, denominado  $\beta_{mod}$ , adecuado a una red de volumen fotorrefractiva, que tiene en cuenta la modulación de índice calculada en el Capítulo 4. La definición de este nuevo parámetro permite describir de manera unificada el modo en que el espesor del cristal, el campo externo aplicado y el diámetro de la pupila modifican la visibilidad de las autoimágenes.

La visibilidad de los patrones experimentales y la visibilidad de las respectivas simulaciones son graficadas en términos del parámetro  $\beta_{mod}$ , calculado para la red de volumen correspondiente a cada patrón, es decir, la terna de valores de  $L_Z$ ,  $E_0$  y  $D$  asociada a la red. Se observa un acuerdo razonable entre valores teóricos y experimentales, siendo en algunos casos, donde los intervalos de incerteza se solapan, un acuerdo exacto. A su vez,

los resultados teóricos reproducen el ritmo de crecimiento que muestra la visibilidad de los patrones experimentales en las tres situaciones estudiadas previamente: para un espesor del cristal  $L_z$  creciente, para un campo externo  $E_0$  creciente y cuando el diámetro de pupila  $D$  disminuye. En todos estos casos, la visibilidad mantiene su dependencia sinusoidal cuando es analizada en términos del parámetro  $\beta_{mod}$  definido en el Capítulo 5.

El acuerdo observado entre los valores de la visibilidad de las autoimágenes teóricas y experimentales valida los modelos propuestos en esta tesis. Por una parte, se confirma el modelo considerado en la etapa de registro para explicar la formación de la red de índice en un cristal fotorrefractivo usando luz incoherente y para caracterizar este tipo de redes. Por otra parte, se avala el modelo basado en la formulación de integral de camino usado para propagar el campo luminoso en el medio inhomogéneo de la red de índice y, posteriormente, en el medio homogéneo en el cual se calcula la intensidad del patrón de Fresnel. A su vez, la visibilidad de los patrones teóricos y experimentales analizados en términos del parámetro  $\beta_{mod}$  muestran el mismo crecimiento sinusoidal, lo cual confirma este parámetro como el adecuado para el estudio de las redes fotorrefractivas y valida la generalización hecha a partir del parámetro correspondiente a la red de fase plana.

Es relevante comparar el comportamiento de la red de fase plana y la red de fase de volumen, en especial, la red fotorrefractiva, en cuanto a la calidad de las autoimágenes que las mismas generan. Es bien sabido que a partir de una red de fase plana es posible lograr una visibilidad unitaria fijando la amplitud de modulación de la red en el valor  $\pi/2$ . A la luz de los resultados del Capítulo 5, queda demostrado que una red de volumen fotorrefractiva es una red sintonizable, mediante el ajuste de ciertos parámetros que determinan las características de la red, de manera tal de lograr, en particular, una visibilidad unitaria. Por lo tanto, las redes de volumen fotorrefractivas muestran una mayor versatilidad, siendo su comportamiento regulable en base a las necesidades de un determinado experimento. Visto como un subsistema óptico para el control de la visibilidad de las autoimágenes, puede ser aprovechado en dispositivos de procesamiento de la información.

Los resultados presentados en esta Tesis motivan el análisis de nuevos aspectos a considerar. Uno de estos aspectos es el cálculo de la intensidad de los patrones generados



por una red de volumen cuando se utiliza una aproximación de más alto orden en el propagador inhomogéneo.

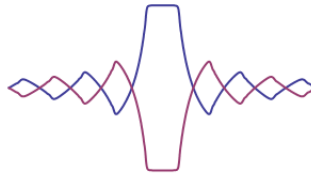
Otro aspecto se vincula con la verificación experimental de los resultados teóricos referentes a redes complejas que presenten modulación en amplitud y fase. Con este objetivo, se propone el empleo de un material que sea a la vez fotocrómico y fotorrefractivo para el registro de una red de amplitud y fase, respectivamente. Algunos trabajos muestran la presencia de ambos efectos, fotocrómico y fotorrefractivo, en cristales BSO, lo cual justifica el empleo de este material para la realización del experimento propuesto.

Como es bien sabido, a partir del efecto Lau, se pueden obtener patrones de franjas semejantes a las autoimágenes iluminando una red objeto con una fuente extensa convenientemente codificada. De este modo, empleando dos redes 1D de amplitud idénticas, orientadas paralelamente y separadas una distancia igual a la distancia de Talbot, se obtienen en el infinito patrones de alto contraste. La primera red de este dispositivo actúa como fuente incoherente codificada linealmente, mientras que la segunda lo hace como transparencia objeto. Se ha implementado el efecto Lau en el que la red de volumen fotorrefractiva actúa como red objeto. Se propone en el futuro el empleo de la simulación de la red de volumen para modelar los resultados experimentales.

Otro de los objetivos que se plantea es el análisis del comportamiento de las redes fotorrefractivas generadas por formación de imagen, en lo referente a la selectividad angular cuando son usadas para difractar un haz de luz coherente. El formalismo presentado en esta Tesis incorpora una red de volumen físicamente más realista que la sucesión de planos equiespaciados del modelo de Bragg. Asimismo, sería de interés analizar la situación en la que el propagador propuesto para el cálculo de la amplitud en el campo cercano, es reemplazado por otro que permite calcular la amplitud en el campo lejano, y a partir de este, la eficiencia de difracción de la red de volumen.

## 6.2 Lista de publicaciones

- G. Forte, A. Lencina, M. Tebaldi, N. Bolognini, *Optical diffraction by inhomogeneous volume objects*, Proc. SPIE, Vol. **7065**, 706518 (2008)
- G. Forte, A. Lencina, M. Tebaldi, N. Bolognini, *Self-imaging by a volume grating*, Opt. Commun. **284** (2011) 2494.
- G. Forte, A. Lencina, M. Tebaldi, N. Bolognini, *Talbot effect by a photorefractive volume phase grating*, Applied Optics. **51** (2012) 479.



# Apéndice 1

## Derivación de la Ec. (2.8) de la Sección 2.2.1

El cálculo comienza considerando la Ec. (2.1)

$$\nabla \times \mathbf{E} = i\omega \mathbf{B} \quad (\text{A.1})$$

Se aplica el operador rotacional en ambos miembros de (A.1), como sigue

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times i\omega \mathbf{B} \quad (\text{A.2})$$

El primer miembro de (A.2) se desarrolla usando la siguiente identidad vectorial

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (\text{A.3})$$

Para llegar a la expresión encerrada entre paréntesis del segundo miembro de (A.3) se comienza con la relación constitutiva dada por la Ec. (2.6)

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \varepsilon_0 \varepsilon_t(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (\text{A.4})$$

donde se ha considerado la dependencia explícita con la coordenada espacial. Aplicando el operador divergencia en ambos miembros y usando la Ec. (2.4), la (A.4) queda como sigue

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}) = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \varepsilon_t(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r})) = \nabla \varepsilon_0 \varepsilon_t(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \varepsilon_0 \varepsilon_t(\mathbf{r}) \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (\text{A.5})$$

de donde sale la siguiente expresión

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \varepsilon_t \cdot \mathbf{E} / \varepsilon_t \quad (\text{A.6})$$

El segundo miembro de (A.2) se desarrolla usando la relación constitutiva (2.7) junto con la Ec. (2.2)

$$\nabla \times i\omega \mathbf{B} = i\omega \mu_0 \mu_t \nabla \times \mathbf{H} = i\omega \mu_0 \mu_t (\mathbf{J} - i\omega \mathbf{D}) \quad (\text{A.7})$$

y luego las relaciones constitutivas (2.5) y (2.6), para  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{D}$ , respectivamente

$$i\omega\mu_0\mu_t(\mathbf{J} - i\omega\mathbf{D}) = i\omega\mu_0\mu_t(\varepsilon_0\omega\sigma_t\mathbf{E} - i\omega\varepsilon_0\varepsilon_t\mathbf{E}) = \mu_0\mu_t\varepsilon_0\omega^2(\varepsilon_t + i\sigma_t)\mathbf{E} \quad (\text{A.8})$$

Finalmente, la Ec. (A.2) se puede reescribir reemplazando el primer miembro por (A.3) junto con (A.6) y el segundo miembro por (A.8) quedando la siguiente expresión, que no es otra cosa que la Ec. (2.8) de la Sección 2.2.1

$$\nabla\left(\frac{1}{\varepsilon_t}\nabla\varepsilon_t.\mathbf{E}\right) + \nabla^2\mathbf{E} + k_0^2\mu_t(i\sigma_t + \varepsilon_t)\mathbf{E} = 0 \quad (\text{A.9})$$

donde se ha usado la relación  $k_0^2 = \mu_0\varepsilon_0\omega^2$

## Apéndice 2

### Cálculo del factor de normalización $A$ en el propagador de la Sección 2.2.2

El cálculo comienza considerando la propagación del campo en un medio débilmente inhomogéneo, cuyo índice de refracción se expresa como sigue

$$n(z, x) = 1 - n_1(z, x), \quad 0 < n_1 \ll 1 \quad (\text{A.1})$$

En este caso, es lícito usar una aproximación paraxial, tal que  $\Delta x / \Delta z \ll 1$ . La función  $S_j(x_j, x_{j+1}, \Delta z)$  que aparece en la Ec. (2.14), se expresa de la siguiente forma cuando la distancia de propagación  $\Delta z = \varepsilon$  es pequeña

$$S_j(x_j, x_{j+1}, \varepsilon) = n(z, x_j) \Delta s = n(z, x_j) \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{x_{j+1} - x_j}{\varepsilon} \right)^2 \right) \varepsilon \quad (\text{A.2})$$

donde se ha usado la aproximación a primer orden en  $\Delta x / \varepsilon$  del elemento finito de longitud de camino  $\Delta s = \left( 1 + (\Delta x / \varepsilon)^2 \right)^{1/2} \varepsilon$ . Evaluando (A.1) en (A.2) resulta

$$S_j(x_j, x_{j+1}, \varepsilon) = \left( \frac{1}{2} \left( \frac{x_{j+1} - x_j}{\varepsilon} \right)^2 + 1 - n_1(z, x_j) \right) \varepsilon \quad (\text{A.3})$$

El propagador del campo a través de la distancia  $\varepsilon$  se expresa como sigue

$$\langle z + \varepsilon, x_{j+1} | z, x_j \rangle = \int e^{ik_0 S_j(x_j, x_{j+1}, \varepsilon)} \frac{dx_j}{A} \quad (\text{A.4})$$

y la amplitud del campo que se ha propagado a través de esa distancia pequeña se escribe de la siguiente manera

$$\langle z + \varepsilon, x_{j+1} | \Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \langle z + \varepsilon, x_{j+1} | z, x_j \rangle \langle z, x_j | \Psi \rangle \frac{dx_j}{A} \quad (\text{A.5})$$

Usando (A.3) y (A.4), la Ec (A.5) resulta

$$\langle z + \varepsilon, x_{j+1} | \Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{ik_0 \varepsilon} e^{\left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x_{j+1} - x_j}{\varepsilon} \right)^2 - n_1(z, x_j) \right]} \langle z, x_j | \Psi \rangle \frac{dx_j}{A} \quad (\text{A.6})$$

Haciendo el siguiente cambio de variables

$$\begin{cases} x_{j+1} = x \\ x_j = x_{j+1} + \omega \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

la Ec. (A.6) queda como sigue

$$\langle z + \varepsilon, x | \Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} e^{ik_0 \omega^2 / 2\varepsilon} e^{-ik_0 \varepsilon n_1(z, x + \omega)} e^{ik_0 \varepsilon} \langle z, x + \omega | \Psi \rangle \frac{d\omega}{A} \quad (\text{A.8})$$

La función  $\Psi$  se puede expandir en serie de potencias manteniendo términos de orden  $\varepsilon$ , lo cual implica mantener términos de segundo orden en  $\omega$ . Expandiendo el lado izquierdo de la igualdad a primer orden en  $\varepsilon$  y el lado derecho a primer orden en  $\varepsilon$  y segundo orden en  $\omega$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \langle z, x | \Psi \rangle + \varepsilon \frac{\partial \Psi}{\partial z} &= \int_{\mathbb{R}} e^{ik_0 \omega^2 / 2\varepsilon} \left[ 1 + ik_0 \varepsilon (1 - n_1(z, x)) \right] \\ &\times \left[ \langle z, x | \Psi \rangle + \omega \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \frac{1}{2} \omega^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right] \frac{d\omega}{A} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

El término principal del miembro derecho de (A.9) es la función  $\langle z, x | \Psi \rangle$  multiplicada por la siguiente integral

$$\frac{1}{A} \int_{\mathbb{R}} e^{ik_0 \omega^2 / 2\varepsilon} d\omega = \frac{1}{A} \left( \frac{i\varepsilon}{k_0} \right)^{1/2} \quad (\text{A.10})$$

Para que se cumpla la igualdad de (A.9) los términos del mismo orden de la expansión en ambos miembros deben ser iguales uno a uno, por lo que (A.10) es igual a 1, o sea

$$A = \left( \frac{i\varepsilon}{k_0} \right)^{1/2} \quad (\text{A.11})$$

# Apéndice 3

## Derivación de la Ec. (2.24) de la Sección 2.2.3

El cálculo comienza considerando la Ec. (2.23)

$$S^{(1)}[t, 0] = \int_{z_0}^{z_t} n(z, x) \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 \right) dz \quad (\text{A.1})$$

Explotando la analogía con la Mecánica Clásica, el integrando de (A.1) se denomina lagrangiana óptica,  $L(z, x, \dot{x})$ . La condición de extremo de  $S^{(1)}$ , es decir,  $\delta S^{(1)}[t, 0] = 0$ , implica que la curva  $x(z)$  que hace mínima (o máxima) la integral debe satisfacer la ecuación de Euler:

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad L = n(z, x) \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 \right) \quad (\text{A.2})$$

Evaluando  $L$  queda:

$$\frac{dL}{d\dot{x}} = n(z, x) \frac{dx}{dz}$$

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial n}{\partial z} \frac{dx}{dz} + n \frac{d^2 x}{dz^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial n}{\partial x} \left( \frac{dx}{dz} \right)^2$$

Finalmente (A.2) queda como sigue

$$\frac{d}{dz} \left( n \frac{dx}{dz} \right) \approx \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial n}{\partial x} \left( \frac{dx}{dz} \right)^2 \quad (\text{A.3})$$

o sea, idéntica a la Ec. (2.24) de la Sección 2.2.3.